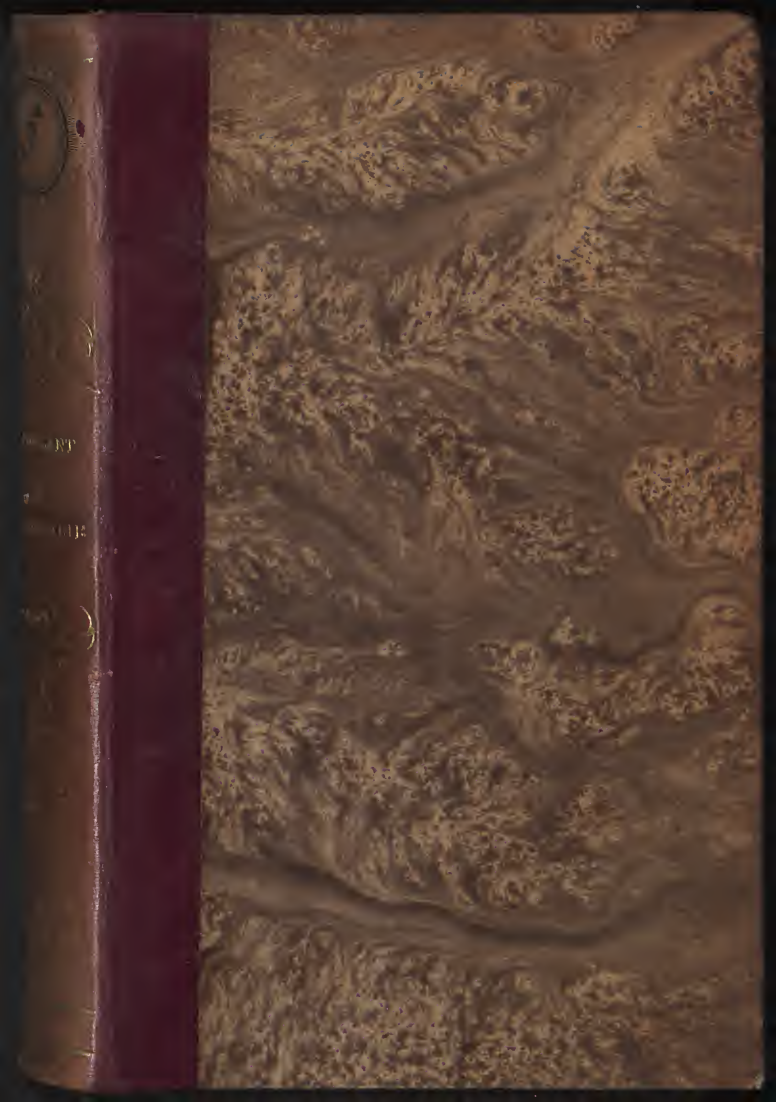


REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

PLANA VII 5

RECUEIL

DE DIVERSES PROPOSITIONS

DE GÉOMÉTRIE,

PRÉCÉDÉ

D'UN PRÉCIS DU LEVÉ DES PLANS.

IMPRIMERIE DE HUZARD-COURCIER,
rue du Jardinet, n° 12.

RECUEIL
DE
DIVERSES PROPOSITIONS
DE GÉOMÉTRIE,

RÉSOLUES OU DÉMONTRÉES

PAR L'ANALYSE ALGÉBRIQUE;

PRÉCÉDÉ

D'UN PRÉCIS DU LEVÉ DES PLANS;

PAR L. PUISSANT,

Chevalier des Ordres royaux de Saint-Louis et de la Légion-d'Honneur,
Officier supérieur au Corps royal des Ingénieurs-Géographes-Militaires,
Professeur et Chef des études à l'École d'application de ce Corps, etc.

TROISIÈME ÉDITION,
CORRIGÉE ET AUGMENTÉE.

PARIS,
BACHELIER (SUCCESSEUR DE Mme Ve COURCIER), LIBRAIRE,
quai des Augustins, n° 55.

1824.

ACCADEMIA R. DELLE SCIENZE TORINO

A M. DE LAPLACE,

Pair de France, Grand Officier de la Légion-d'Honneur, l'un des quarante de l'Académie française; de l'Académie des Sciences; Membre du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Gottingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemarck, de Suède, de Prusse, des Pays-Bas, d'Italie, etc.

MONSIEUR LE MARQUIS,

Les immenses progrès que vos écrits ont fait faire aux Sciences mathématiques et physiques, et plus particulièrement les savantes leçons que vous avez données, en 1795, *aux Écoles normales, avaient signalé l'imperfection et l'insuffisance des élémens de ces sciences. On reconnut dès lors la nécessité d'établir ces élémens sur un nouveau plan, d'y introduire et coordonner quelques-unes des sublimes théories qui sont l'objet de vos grandes découvertes et de celles de vos illustres contemporains :*

*aussi plusieurs géomètres très distingués ont-ils rempli avec un succès complet, cette tâche longue et difficile; et l'une des branches des Mathématiques élémentaires qu'ils ont perfectionnées le plus, est celle à laquelle on a donné le nom d'*Application de l'Algèbre à la Géométrie. *Quoique l'Ouvrage que je publie pour la troisième fois, sur cette matière, soit encore susceptible d'être amélioré, j'ose cependant, M. le Marquis, vous en adresser l'hommage. Les encouragemens que reçoivent de vous ceux qui professent ou cultivent les sciences, et la bienveillance particulière dont vous avez daigné m'honorer, sont les motifs qui m'engagent à vous offrir cette faible marque de ma vive reconnaissance. Puisse ce Recueil de Propositions de Géométrie mériter votre suffrage, et contribuer à inspirer aux élèves cet ardent amour de l'étude et de la méditation, qui procure à l'homme de génie une gloire immortelle !*

L. PUISSANT.

AVANT-PROPOS.

Si les géomètres qui écrivent sur les élémens des sciences exactes, se bornent souvent à en exposer les principes, ce n'est pas qu'ils regardent comme peu utiles au développement des facultés intellectuelles les Traités spécialement consacrés aux applications. En effet, l'expérience prouve que rien n'est plus propre à répandre une vive lumière sur un sujet abstrait, que de soumettre à l'analyse diverses questions particulières avec lesquelles ce sujet a un rapport direct. C'est ce qui me fit penser, à l'époque où parut la première édition de l'excellent *Traité d'application de l'Algèbre à la Géométrie*, par M. Lacroix, que les jeunes mathématiciens, et même les professeurs, me sauraient gré d'avoir formé un recueil de propositions de Géométrie, dont les solutions ou les démonstrations dépendent immédiatement des principes exposés dans cet ouvrage, suivant les idées lumineuses de Lagrange et de Monge La nouveauté de la méthode ne me fit d'abord considérer que des propositions relatives à la Géométrie des deux dimensions; mais je ne tardai pas à sentir l'insuffisance de ce choix. Aujourd'hui cette branche des Mathématiques est cultivée avec un si grand succès,

et son utilité est si bien constatée, qu'il m'a paru même nécessaire de refondre en grande partie la seconde édition de mon Recueil, afin d'y répandre plus de variété et de présenter un choix mieux assorti de questions de Géométrie de l'espace.

Entre autres choses propres à exciter de l'intérêt, j'ai rappelé, dans cette nouvelle collection, quelques propriétés de la projection orthogonale dues à M. Poisson, et dont la Mécanique rationnelle peut tirer de grands avantages; démontré plusieurs théorèmes remarquables sur les polygones et les polyèdres, extraits de la Géométrie de position de Carnot et de la Polyédrométrie de M. Lhuilier de Genève; exposé la transformation des coordonnées rectangles dans l'espace, selon la méthode de Lagrange, et celle des coordonnées obliques, d'après les idées de M. Français, officier supérieur au corps royal du Génie; résolu avec toute la simplicité possible quelques problèmes relatifs à la perspective linéaire, aux ombres et à la projection des cartes géographiques, et développé l'élégante solution analytique que M. Gergonne, rédacteur des *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, a donnée du problème où il s'agit de tracer sur une sphère un cercle tangent à trois autres cercles. J'ai, en outre, inséré dans cette édition, en faveur de ceux qui connaissent les principes du calcul différentiel, un abrégé de la théorie des osculations, d'après Lagrange, et l'ai appliqué à la recherche des équations de quelques-unes des surfaces courbes que

Monge a traitées dans sa Géométrie analytique. Enfin j'ai donné, tant les démonstrations de plusieurs formules employées dans les hautes Mathématiques que les solutions de quelques problèmes curieux de *maximis* et *minimis;* mais souvent aussi, pour que les élèves puissent fortifier davantage leur intelligence, je les ai mis dans la nécessité de s'exercer eux-mêmes à compléter l'analyse de certaines propositions, ou, ce qui vaut encore mieux, à les résoudre en entier.

Dans la vue de ne pas m'écarter de mes illustres modèles, je n'ai jamais échaffaudé mes calculs sur des constructions géométriques qui ne dérivent pas essentiellement de la nature des propositions, afin de faire mieux ressortir les avantages de l'Algèbre; et c'est de quoi l'on s'assurera en comparant le procédé analytique que j'emploie avec les méthodes mixtes dont on fait usage, depuis Descartes jusqu'à nous, dans la résolution de la plupart des questions de Géométrie. Il est vrai, cependant, que parmi les problèmes qui composent ce Recueil, il en est plusieurs qui ne sont pas par eux-mêmes d'une grande utilité; mais comme ceux-ci ne peuvent manquer de piquer la curiosité du lecteur, à cause de la célébrité qu'ils ont eue autrefois, ou parce qu'ils sont peu connus, ou parce que l'Analyse algébrique s'y applique avec élégance, je n'ai point hésité à les publier.

Avant de m'occuper de ces sortes de problèmes, j'ai donné un supplément aux Traités élémentaires

de Trigonométrie, dans lequel se trouve l'application de cette science au levé des plans et à l'évaluation des surfaces. Il est essentiellement lié à la Trigonométrie de M. Legendre, et peut être considéré, à cause des additions nombreuses que j'y ai faites, comme une introduction à mes Traités de Géodésie théorique et pratique. Ce précis sera, je crois, suffisant pour ceux qui ne veulent appliquer la Topographie qu'à leurs besoins, ou se rendre bons juges en matière de contestation entre les propriétaires.

Pour rendre le présent Ouvrage digne de servir d'appendice à ceux auxquels il se rattache, et lui donner l'étendue qu'il présente, il m'eût été impossible de tirer tout de mon propre fonds : aussi ai-je, comme on voit, puisé aux meilleures sources, et fait en sorte d'offrir aux élèves qui suivent les leçons des Colléges royaux, ou qui se destinent pour l'École Polytechnique, des applications variées et intéressantes de la nouvelle manière de traiter les propositions de Géométrie, en les mettant en outre à même de lire avec fruit et facilité les Mémoires où sont étalées les richesses de l'Analyse géométrique.

TABLE DES MATIÈRES.

TRIGONOMÉTRIE APPLIQUÉE AU LEVÉ DES PLANS.

PREMIÈRE SECTION.

Pag.

CHAPITRE PREMIER. *Notions préliminaires*..... 1

Définition des cartes en général. . . . . *ib.*

Ce qu'on entend par *échelle* d'un plan. . . . . *ib.*

De quelle manière on forme le canevas d'une carte, ou du meilleur système de triangulation.. 2

Résumé des formules trigonométriques. 3

Fonctions circulaires.. . . . . *ib.*

Propriétés du triangle rectiligne. 5

Diverses expressions de l'aire de sa surface.. 6

Des rayons des cercles inscrit et circonscrit.. 7

Propriétés du triangle sphérique.. . . . . *ib.*

Diverses expressions de l'aire de sa surface. 8

Des rayons des cercles inscrit et circonscrit.. 9

Description du graphomètre. . . . . *ib.*

Usage du vernier ou *nonius*. 10

En quoi consiste l'*erreur de parallélisme* ou *de collimation*. . *ib.*

Description du petit cercle répétiteur. 12

Cet instrument, inventé par Borda, est préférable au graphomètre pour les opérations géodésiques importantes. . . . . *ib.*

De la mesure des angles avec le graphomètre. 13

De la mesure des angles avec le cercle répétiteur.. 14

Moyen de faire disparaître la *parallaxe* des fils du réticule. . . *ib.*

Quels sont les principaux avantages de cet instrument.. . . . . *ib.*

La mesure des angles horizontaux et verticaux est exempte de l'erreur de collimation. 15

Pag.

Comment on ramène l'usage du cercle répétiteur à celui du graphomètre. 16
Avantages du *Théodolite*. . . . . *ib.*
Ceux qui sont répétiteurs donnent 1, 2, 3.... fois l'angle horizontal cherché.

CHAPITRE II. *De la réduction des angles au centre de la station*. 18

Centres visibles et accessibles. . . . . *ib.*
Ce qu'on entend par *angle de direction*. 20
Centres invisibles des tours à bases circulaires. 22
Centres invisibles des tours à bases polygonales. 23
De la *phase* des signaux. 24
Les distances entre les signaux doivent être calculées approximativement, pour réduire un angle au centre de la station. . . . *ib.*

CHAPITRE III. *De la réduction des angles à l'horizon*.

On donne deux formules pour cet effet. 26
Ce qu'on entend par *angles moyens* d'un triangle géodésique. . 30

CHAPITRE IV. *De la détermination des distances et de leur orientation*. 32

Mesure des bases. . . . . *ib.*
Précaution à prendre dans cette opération. . . . . *ib.*
Réduction des bases à l'horizon. 33
De la chaîne métrique usitée dans l'Arpentage. . . . . *ib.*
De l'usage de la *stadia* pour évaluer sur-le-champ les petites distances 34
Formule pour réduire une longue base au niveau de la mer. . . . 35
Orientation des plans. . . . . *ib.*
Moyens les plus simples à ce sujet. 36
Ce qu'on entend par *azimut*. . . . . *ib.*
De quelle manière on observe astronomiquement les angles azimutaux. . . . . *ib.*
Calculs des triangles. 37
Démonstration du théorème de M. Legendre, pour résoudre les triangles sphériques peu courbes comme des triangles rectilignes. . . . . *ib.*
Ce qu'on entend par *excès sphérique* et comment on le détermine. 38

Pag.
Type du calcul d'un réseau de triangles géodésiques. 39
Évaluation de la plus courte distance de deux points connus sur la terre par leur latitude et leur longitude 41
Moyen simple de former le canevas d'un plan. 43
De l'usage du *rapporteur* pour former ce canevas. 44

Calcul des distances à la méridienne et à la perpendiculaire, et usage de ces lignes pour former le canevas des opérations de détail. . . . . *ib.*

Mode de projection employé par les ingénieurs-géographes pour former la minute de la nouvelle carte de France. 46

CHAPITRE V. *Exposé des méthodes géométriques employées pour déterminer les différences de niveau*. . . . 48

Principe sur lequel est fondée la science du Nivellement. . . . . *ib.*
Ce qu'on entend par *ligne de niveau apparent* et par *ligne de niveau vrai*. 49
La différence de niveau de deux points trigonométriques s'obtient à l'aide des distances zénitales observées réciproquement à ces points. 51
ou bien au moyen d'une seule distance zénitale. 52
De la réduction des distances au zénit, aux sommets des signaux. 53
Formule pour déterminer la hauteur d'une montagne du sommet de laquelle on voit l'horizon de la mer. 56

De la réfraction terrestre. 57

Moyen de l'évaluer et d'y avoir égard dans le calcul des différences de niveau. 58

CHAPITRE VI. *Opérations de détail, et figuré géométrique du terrain*. 62

On expose à cet effet deux des méthodes les plus simples employées en Topographie et dans les opérations de l'Arpentage. 63
Les courbes de niveau équidistantes dans le sens vertical sont propres à faire connaître la forme du terrain. 65
Les ingénieurs-géographes substituent à ces courbes les projections des lignes de plus grande pente. . . . . *ib.*
Nécessité de recourir aux effets de lumière et d'ombre pour caractériser le relief des montagnes sur les cartes topographiques à *petit point*. 66

Pag.

CHAPITRE VII. *Évaluation des surfaces agraires*... 67

PROBLÈMES FONDAMENTAUX.

Évaluation de l'aire d'un rectangle et d'un parallélogramme. . . *ib.*
de celle d'un triangle rectiligne. 68
d'un quadrilatère. 71
d'un polygone régulier. . . . . *ib.*
d'un cercle et de ses différentes parties. 72
d'une ellipse. 74

De la mesure des polygones irréguliers. . . . . *ib.*
Divers exemples numériques à ce sujet.

SECONDE SECTION.

GÉOMÉTRIE A DEUX DIMENSIONS.

CHAPITRE PREMIER. *De la Polygonométrie*. 81

On fait connaître plusieurs théorèmes remarquables sur les polygones dus à MM. L'huilier et Carnot, c'est-à-dire certaines relations qui existent entre les angles, les aires et les côtés d'un polygone.

CHAPITRE II. *Notions préliminaires sur l'application de l'Algèbre à la Géométrie*. 89

Équations de la ligne droite, et conséquences qui en résultent. . *ib.*
Théorie des coordonnées obliques d'après les idées de M. Français, officier supérieur du génie. 92

Équation du cercle, et solution du problème concernant un cercle qui en coupe deux autres. 97
Ce qu'on entend par *axe radical* de deux cercles. 98
Par *centre de similitude*, et par *pôles conjugués*. 99

Transformation des coordonnées sur un plan. 100
Des coordonnées polaires. 102

Des différentes formes que prennent les équations des courbes du second degré, eu égard aux axes des coordonnées auxquels ces lignes peuvent être rapportées. . . . . *ib.*
Des équations polaires des courbes du second ordre. 105

Methode générale pour mener des tangentes aux courbes. . . 107
Règle de Mnémonique pour retrouver de suite l'équation d'une

Pag.
tangente. 109
De l'équation d'une tangente à deux cercles. 112

CHAPITRE III. *Des problèmes déterminés, et de quelques théorèmes de Géométrie*. 115

Expression de l'aire d'un polygone rectiligne quelconque en fonction des coordonnées des sommets de ses angles. . . . . *ib.*
Diverses propriétés du triangle rectiligne, démontrées par des procédés analytiques différens. 116
Problème où il s'agit d'inscrire dans un cercle donné un triangle dont les trois côtés passent par trois points donnés. 125
Démonstration de plusieurs théorèmes relatifs au quadrilatère plan inscrit au cercle. 133
Problème dont la solution dépend de la résolution d'une équation réciproque. 142
Propriété de deux droites rectangulaires menées dans le cercle. . . 145
Mener des tangentes et des sécantes à des cercles, suivant certaines conditions. 148
Théorèmes relatifs aux courbes du second degré. 154
Division des figures suivant certaines conditions. 160
Les centres de similitude de trois cercles pris deux à deux sont en ligne droite. 165
Conséquence qui résulte de cette propriété. 167
Autre propriété des tangentes à une courbe du second ordre, menées par les extrémités des cordes qui se coupent toutes au même point. 167
Problème extrait des œuvres de Descartes, et dont la solution dépend d'une équation du sixième degré. 168
Problème sur la lumière réfractée, tirée de l'*Arithmétique universelle* de Newton. 171
Problème dont la solution dépend d'une équation du quatrième degré. 173
On donne deux solutions de ce problème : *Trouver le rayon d'un cercle tangent à trois autres*. 176
Démonstration du théorème de Cotes, et conséquences qui en résultent. 183

CHAPITRE IV. *Des problèmes indéterminés ou des lieux plans*. 188

Mener des droites suivant certaines conditions. 188
Propriété singulière du centre des *moyennes distances*. 194

Pag.

Problèmes sur les contacts, et dont les solutions dépendent de la parabole. 196
Détermination d'un point, connaissant les angles sous lesquels on voit de ce point deux distances données de grandeur et de position. 199
Du tracé de la parabole par des intersections de lignes droites. . . 201
Problème extrait de l'*Arithmétique universelle*, et dont les solutions dépendent d'une hyperbole équilatère. 204
De la courbe décrite par le centre d'un cercle mobile qui en touche deux autres fixes. 207
Autre problème sur les contacts dont la solution dépend d'une hyperbole. 210

Trouver le lieu géométrique du sommet d'un angle droit dont les côtés sont constamment tangens à une courbe du second degré. 214

On donne deux solutions de ce problème.
Problèmes indéterminés dont les solutions dépendent de l'une des courbes du second degré. 217
Problème sur les transversales, d'où résulte le moyen de mener avec le seul secours de la règle une tangente à une courbe du second ordre. 221
Inscription d'une ellipse dans un triangle. 223
Description d'une courbe du second ordre d'après certaines conditions. 225
Détermination des axes d'une ellipse, étant donnés les diamètres conjugués et l'angle qu'ils forment entre eux. 228
Équation de la conchoïde de Nicomède. 231
Résolution du problème de deux moyennes proportionnelles géométriques. 232
Équation de la cissoïde de Dioclès. 233
Problème dont la solution générale renferme toute la théorie du *pantographe*. 234
Moyen fort simple de décrire une ellipse par un mouvement continu. 237

Faire passer une courbe parabolique par plusieurs points donnés. 239
Solution de ce problème par Lagrange, d'où dérive une méthode d'interpolation fort simple. 242
Autre formule d'interpolation très usitée. 243

TROISIÈME SECTION.

GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS.

Pag.

CHAPITRE PREMIER. *De la Polyédrométrie*.....245

On fait connaître diverses relations remarquables entre les angles et les faces des polyèdres.. . . . . *ib.*

CHAPITRE II. *Des équations du point, de la ligne droite et du plan, considérés dans l'espace; et de quelques propriétés des projections*.....250

Relations entre les cosinus des angles que trois plans rectangulaires font avec les plans coordonnés. 258
Expression de la tangente de l'angle qu'un plan assujetti à passer par trois points donnés fait avec l'horizon.. 259
Théorèmes de M. Poisson sur les projections orthogonales des aires. 260
Leur usage en Mécanique. 264
Équations de la ligne droite et du plan rapportés au même système de coordonnées obliques, d'après la théorie de M. Français . . 264

Equation de la sphère, et problème concernant une sphère qui en coupe deux autres.. 268
Conséquence qui résulte de cette solution.. 270

CHAPITRE III. *Transformation des coordonnées dans l'espace*.....271

On donne de nouvelles démonstrations des formules relatives à cet objet, tant des formules d'Euler et de Lagrange, que de celles de MM. Français et Gergonne, et l'on en déduit plusieurs conséquences remarquables. 272
Transformation des coordonnées rectangulaires ou obliques en coordonnées polaires. 286

CHAPITRE IV. *Discussion abrégée des surfaces du second ordre*.....289

Équation d'un *plan diamétral*.. . . . . *ib.*
On ramène à une forme plus simple l'équation générale du second

Pag.

degré à trois variables, par la méthode de la transformation des axes. 290
Caractère auquel on reconnaît qu'une surface courbe est douée ou privée d'un centre. 294
Équation de l'ellipsoïde. 297
de l'hyperboloïde à une nappe. 298
de l'hyperboloïde à deux nappes. 299
du paraboloïde elliptique. 300
du paraboloïde hyperbolique. . . . . *ib.*
Cas où la surface est cylindrique. 301

CHAPITRE V. *De la recherche de l'équation d'une surface du second ordre, d'après la loi connue de sa description*. 302

Solution relative aux surfaces cylindriques. . . . . *ib.*
Solution relative aux surfaces coniques. 305
Équation de la surface d'un cône droit à base circulaire, situé d'une manière quelconque par rapport aux plans coordonnés rectangulaires. 308
Solution relative aux surfaces de révolution. 309
Recherche de la surface engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur trois autres droites fixes. 312

CHAPITRE VI. *Méthode générale pour mener des plans tangens aux surfaces courbes, et applications de cette méthode*. 316

Règle de Mnémonique pour retrouver de suite l'équation du plan tangent. 318
Du plan tangent à une sphère, ou de la courbe de contact. 320
De la normale à une surface courbe. 321
Du plan tangent à une sphère et parallèle à un plan donné. . . . 322
Problème sur le contact des sphères, et dont la solution dépend de l'intersection d'un paraboloïde de révolution et d'un plan. . 324
Équation d'un plan tangent à deux sphères. 326
Remarque sur le plan tangent à trois sphères. 328
Équation du cône circonscrit à deux sphères. 329
Du plan tangent à deux cônes droits ayant même sommet. . . . 331
Propriétés d'une sphère mobile qui en touche constamment trois

Pag.
autres fixes. 333
De là résulte le moyen de déterminer le centre et le rayon d'une sphère qui en touche quatre autres. 335

CHAPITRE VII. *Problèmes et théorèmes dont les solutions ou les démonstrations sont fondées sur la théorie précédente* 336

Expression du volume d'un segment sphérique. . . . . *ib.*
De la perspective d'une droite donnée dans l'espace, et conséquences qui en dérivent. 338
Propriété du centre des moyennes distances de plusieurs points situés dans l'espace. 342
Autre propriété de ce centre. 344
Dans un angle trièdre tricetangle, mener un plan de manière que sa partie interceptée dans cet angle forme un triangle semblable à un triangle donné. 346
Théorème sur le quadrilatère gauche. 348
Théorème concernant l'hexaèdre irrégulier. 350
Équation du solide de révolution engendré par un arc tournant autour de sa corde. 352
Problème où l'on se propose de déterminer sur la sphère la position d'un point, relativement à deux autres points fixes, et cela en satisfaisant à certaines conditions. 353
Démonstration d'un fort beau théorème sur les polygones rectilignes gauches. 356
Si les sommets d'une suite de surfaces coniques enveloppant une surface du second ordre, sont tous sur un même plan situé d'une manière quelconque dans l'espace, les plans des lignes de contact de ces surfaces coniques avec la surface donnée passeront tous par un même point. 360

Recherche des équations des courbes qui résultent des sections du cône par un plan. 361
Théorèmes et problèmes relatifs aux surfaces du second degré. . 367

Des propriétés des projections stéréographiques et orthographiques des cercles de la sphère, sur lesquelles se fonde la construction des mappemondes et celle des cadrans solaires. . 375

Des cercles qui touchent à la fois trois cercles donnés sur une sphère. 380

Pag.
Analyse des principales propriétés du tétraèdre. 385
Théorèmes concernant les surfaces du second ordre. 401
Énoncés de divers théorèmes et problèmes. 405

QUATRIÈME SECTION.

NOTIONS SUR L'APPLICATION DE L'ANALYSE TRANSCENDANTE A LA GÉOMÉTRIE.

Pag.
CHAPITRE PREMIER. *Théorie générale des osculations*. 407

Osculation des courbes planes. . . . . *ib.*
Diverses expressions du rayon de courbure. 413
Problème qui dépend de cette théorie. 415
Recherche de l'équation d'une caustique par réflexion. 423
Osculation des courbes à double courbure. 425
Diverses expressions du rayon du cercle osculateur. 430
Osculation des surfaces courbes. 432
Solution d'un problème de catoptrique. 435
Les lignes de plus grande et de plus petite courbures sont à angles droits. 443
Forme simple sous laquelle se présente ordinairement l'équation des lignes de courbure. 444
Détermination de tous les plans qui retranchent d'un angle trièdre une pyramide équivalente à un volume donné. 447

CHAPITRE II. *Recherches des équations de différentes surfaces, d'après la considération du plan tangent* . . . 450

Des surfaces cylindriques. . . . . *ib.*
Des surfaces coniques. 451
Recherche de l'équation de la surface conique individuelle circonscrite à une surface courbe donnée. 452

Énoncés de deux théorèmes sur les surfaces du second degré. . . 455

Des surfaces de révolution. 456

Pag.

CHAPITRE III. *Solutions de quelques problèmes de maximis et minimis*.....459

La plus courte distance de deux droites données dans l'espace est perpendiculaire à ces droites. 462
Solutions de divers problèmes. 464
Problème sur les alvéoles des abeilles. 472
Énoncés de plusieurs autres problèmes sur les *maxima* et les *minima*. 474

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 8, ligne 2 en remontant, au numérateur $\cos^2 c$, *lisez* $\cos^2 \frac{1}{2} c$

16, 9, dernières, *lisez* derniers

28, 9 en remontant. Dans la valeur de $\cos \alpha'$, au lieu de $-\frac{\alpha^2}{2}$, *lisez* $-\frac{\alpha'^2}{2}$

85, 3, dans la valeur de a^2, au lieu de $-{}^2$ [*lisez* -2 [

92, 12, au dénominateur $\sqrt{1-a^2}$, *lisez* $\sqrt{1+a^2}$

126, 4 en remontant, du point α', *lisez* du point a'

165, 13, CC″, *lisez* C″

ibid. 17, Mr′, *lisez* MR′

168, 14, au dénominateur, $2n\alpha$, *lisez* $-2n\alpha$

175, 9 en remontant, $-a'\alpha$, *lisez* $-a^2\alpha$

179, 12 en remontant, $=r''$, *lisez* $=r''^2$

240, 10 en remontant, $\alpha''^2 = \alpha'^2$, *lisez* $\alpha''^2 - \alpha'^2$

247, 18, $\cos(\beta\alpha\delta +$, *lisez* $\cos(\beta\alpha\delta) +$

ibid. 19, $\cos(\gamma\alpha\delta +$, *lisez* $\cos(\gamma\alpha\delta) +$

255, 12, X =, *lisez* V =

308, 7, du nº 113, *lisez* du nº 128

315, 8, qu'elle peut être engendrée, *lisez* qu'il peut être engendré

328, dernière, cercle, *lisez* cercles

330, 2, $[(r \mp r')^2$, *lisez* $[(r \mp r')^2$

334, 4 en remontant, l'une l'autre, *lisez* l'une à l'autre

391, 11, $U = aa'a''\sqrt{[}$, *lisez* $U = 2aa'a''\sqrt{[}$

397, 1, $m \frac{\gamma}{z} p$, *lisez* $m = \frac{\gamma}{z}$

ibid. 11, celle-ci, *lisez* celles-ci

402, 9, $= \frac{\gamma''}{z^2} z$, *lisez* $= \frac{\gamma''}{z''} z$

ibid. 8 en remontant, $\frac{\gamma'\gamma''}{b'}$, *lisez* $\frac{\gamma'\gamma''}{b^2}$

Supplément aux ERRATA *des* Traités de Géodésie *et de* Topographie.

Géodésie, tome I.

Page 98, ligne 15 en remontant, au dénominateur $\sin s \sqrt{\sin s}$, *lisez* $\sqrt{\sin s}$

Géodésie, tome II.

126, 9, D + L, *lisez* D + H

285, 7, *après* deux angles droits, *lisez* plus l'excès sphérique

Table II, à partir de l'année 1827 jusqu'à l'année 1846 inclusivement, *ajoutez* aux nombres correspondans, 0″12

Table IV, vis-à-vis 7h, *lisez* 1′8″,81

Topographie.

Page 178 en remontant, lignes 18 et 20 (1 — cos H′), *lisez* (1 — sin H′)

TRIGONOMÉTRIE

APPLIQUÉE

AU LEVÉ DES PLANS.

PREMIÈRE SECTION.

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires.

Définitions.

1. Former la *carte* d'un pays de peu d'étendue, c'est construire sur le papier une figure semblable à celle du terrain dont les différentes parties sont supposées être projetées sur un plan horizontal par des perpendiculaires abaissées de tous les objets sur ce plan. Le procédé qu'on emploie à cet effet, exige le fréquent usage d'une échelle.

On entend par *échelle* d'une carte ou d'un *plan*, une ligne droite peu étendue, et dont les plus petites parties égales représentent chacune l'unité de mesure linéaire; par exemple, le mètre ou la toise, ou un multiple de l'une de

ces unités. Cette échelle sert à fixer, à l'aide d'un compas, la longueur à laquelle se réduit sur un plan une distance horizontale quelconque évaluée en mètres : alors cette distance est à sa réduction ou *projection* dans un rapport donné. Si, par exemple, ce rapport était celui de 10000 à 1, le plan serait construit à l'échelle du dix-millième; c'est-à-dire qu'une longueur réelle de 10000 mètres ne serait représentée sur le plan que par celle d'un mètre.

On nomme *carte topographique*, le dessin qui représente, dans leur situation respective, tous les détails d'une contrée ou d'un grand domaine. Quant aux cartes embrassant beaucoup d'étendue de pays, et n'en offrant que les objets les plus remarquables, on les appelle *cartes géographiques*.

Pour déterminer les positions respectives des principaux points d'un plan ou d'une carte topographique, il faut considérer ces points comme les sommets des angles des triangles qui, par leur enchaînement, forment un réseau continu dans tous les sens. Ces triangles réunissent les conditions les plus avantageuses lorsqu'ils sont les plus grands possibles, qu'ils approchent le plus de la forme équilatérale, et qu'ils sont liés au moins à une ligne principale ou *base*. Lorsque cette base et les trois angles de chaque triangle sont mesurés, on a tous les élémens nécessaires pour calculer de proche en proche les distances entre les objets; et alors on a le *canevas* du plan. C'est en cela que consistent les *opérations géodésiques*.

Si nous devions nous borner dans cet Ouvrage, à indiquer la marche de ces calculs, nous serions dispensé de donner un résumé des formules trigonométriques les plus remarquables; mais comme ces formules jouent un rôle très important dans les applications de l'Analyse aux diverses branches des Mathématiques, et que la plupart nous seront utiles par la suite, nous les rappellerons en peu de mots. On en trouvera les démonstrations dans le *Traité de*

Trigonométrie de M. Legendre, faisant suite à sa Géométrie; ou dans celui de M. Lacroix, qui précède son application de l'Algèbre à la Géométrie; ou enfin au 2e livre de notre *Traité de Géodésie*, 2e édition.

Résumé des Formules trigonométriques.

Fonctions circulaires.

2. Soient p et q deux arcs quelconques d'un cercle dont le rayon est pris pour unité, on aura

$$\sin^2 p + \cos^2 p = 1, \quad \sin(p \pm q) = \sin p \cos q \pm \cos p \sin q,$$
$$\sin^2 q + \cos^2 q = 1, \quad \cos(p \pm q) = \cos p \cos q \mp \sin p \sin q;$$

desquelles on tire aisément celles-ci par voie d'addition et de soustraction,

$$2 \sin p \cos q = \sin(p+q) + \sin(p-q),$$
$$2 \cos p \sin q = \sin(p+q) - \sin(p-q),$$
$$2 \cos p \cos q = \cos(p+q) + \cos(p-q),$$
$$2 \sin p \sin q = \cos(p-q) - \cos(p+q);$$

ou bien

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q) = \sin p + \sin q,$$
$$2 \cos \tfrac{1}{2}(p+q) \sin \tfrac{1}{2}(p-q) = \sin p - \sin q,$$
$$2 \cos \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q) = \cos p + \cos q,$$
$$-2 \sin \tfrac{1}{2}(p+q) \sin \tfrac{1}{2}(p-q) = \cos p - \cos q.$$

Si l'on fait $q = mp$, on aura

$$2 \sin p \cos mp = \sin(m+1)p - \sin(m-1)p,$$
$$2 \cos p \sin mp = \sin(m+1)p + \sin(m-1)p,$$
$$2 \cos p \cos mp = \cos(m+1)p + \cos(m-1)p,$$
$$2 \sin p \sin mp = \cos(m-1)p - \cos(m+1)p.$$

Si, au contraire, on suppose $q = p$, on aura, en vertu des premières formules ci-dessus,

$$\sin 2p = 2 \sin p \cos p, \qquad \cos p = 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} p,$$
$$\cos 2p = \cos^2 p - \sin^2 p, \quad \cos p = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} p - 1.$$

On a, en outre, ces relations,

$$\tang p = \frac{\sin p}{\cos p}, \quad \cot p = \frac{1}{\tang p} = \frac{\cos p}{\sin p},$$

$$\séc p = \frac{1}{\cos p}, \quad \coséc p = \frac{1}{\sin p};$$

et, par une combinaison binaire des arcs p, q, on obtiendra

$$\tang (p \pm q) = \frac{\sin (p \pm q)}{\cos (p \pm q)} = \frac{\tang p \pm \tang q}{1 \mp \tang p \tang q},$$

$$\tang p \pm \tang q = \frac{\sin (p \pm q)}{\cos p \cos q},$$

$$\cot p \pm \cot q = \pm \frac{\sin (p \pm q)}{\sin p \sin q},$$

$$\tang^2 p - \tang^2 q = \frac{\sin (p+q) \sin (p-q)}{\cos^2 p \cos^2 q},$$

$$\cot^2 p - \cot^2 q = -\frac{\sin (p+q) \sin (p-q)}{\sin^2 p \sin^2 q},$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\tang \frac{1}{2} (p+q)}{\tang \frac{1}{2} (p-q)},$$

$$\frac{\cos p + \cos q}{\cos p - \cos q} = -\frac{\cot \frac{1}{2} (p-q)}{\tang \frac{1}{2} (p+q)} = -\frac{\séc p + \séc q}{\séc p - \séc q},$$

$$\frac{\sin p \pm \sin q}{\cos p + \cos q} = \tang \tfrac{1}{2} (p \pm q),$$

$$\frac{\sin p \pm \sin q}{\cos p - \cos q} = -\cot \tfrac{1}{2} (p \mp q),$$

$$\tang \tfrac{1}{2} p = \frac{\sin p}{1 + \cos p}, \quad \cot \tfrac{1}{2} p = \frac{\sin p}{1 - \cos p},$$

$$\sin p = \frac{\tang p}{\sqrt{1 + \tang^2 p}}, \quad \cos p = \frac{1}{\sqrt{1 + \tang^2 p}}.$$

En général, si 1^Q désigne le quadrant, on a

$$\sin (1^Q \pm p) = + \cos p, \quad \cos (1^Q \pm p) = \mp \sin p,$$

$$\sin (2^Q \pm p) = \mp \sin p, \quad \cos (2^Q \pm p) = - \cos p,$$

$$\sin (3^Q \pm p) = - \cos p, \quad \cos (3^Q \pm p) = \pm \sin p,$$

$$\sin (4^Q \pm p) = \pm \sin p, \quad \cos (4^Q \pm p) = + \cos p.$$

Propriétés du Triangle rectiligne.

3. En représentant généralement par a, b, c, les côtés d'un triangle rectiligne quelconque, et par A, B, C, les angles qui sont respectivement opposés à ces côtés, on aura ces relations,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C;$$

c'est-à-dire que le *carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins deux fois le produit de ces mêmes côtés, multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils forment entre eux ;* en supposant toutefois le rayon des tables égal à l'unité, et l'angle aigu.

Il existe en outre entre les cosinus des trois angles de ce triangle cette relation,

$$1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C = 0;$$

laquelle provient de ce que $A + B + C = 2^{\text{o}}$.

Lorsque le triangle est rectangle, l'angle A, par exemple, est droit, et le côté opposé a est l'hypoténuse; alors, à cause de $\cos A = 0$, on a

$$a^2 = b^2 + c^2;$$

puis, lorsqu'on ajoute respectivement aux deux membres des deux dernières équations précédentes, c^2, b^2, il vient, après les réductions,

$$c = a \cos B = a \sin C,$$
$$b = a \cos C = a \sin B;$$

et par suite,

$$\frac{b}{c} = \frac{\cos C}{\cos B} = \text{tang } B.$$

Désignons maintenant par T l'aire du triangle ABC; on aura ces diverses expressions,

$$T = \tfrac{1}{2} bc \sin A, \quad T = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin (A + B)};$$

mais à cause de

$$a^2 : b^2 :: c^2 :: \sin^2 A : \sin^2 B : \sin^2(A+B),$$

on a

$$a^2 - b^2 : c^2 :: \sin^2 A - \sin^2 B : \sin^2(A+B);$$

d'où $$c^2 = \frac{(a^2 - b^2)\sin^2(A+B)}{\sin^2 A - \sin^2 B};$$

par conséquent,

$$T = \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\frac{\sin A \sin B \sin(A+B)}{\sin^2 A - \sin^2 B},$$

et puisque $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$, on a définitivement

$$T = \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\frac{\sin A \sin B}{\sin(A-B)}.$$

Cette expression se présente sous la forme indéterminée, lorsque $a = b$, parce qu'alors $A = B$, et $\sin(A-B) = 0$; mais dans ce cas, la 2e valeur de T devient

$$T = \frac{c^2}{2}\frac{\sin^2 A}{\sin 2A} = \frac{c^2 \sin^2 A}{4 \sin A \cos A} = \frac{c^2}{4}\operatorname{tang} A.$$

On a encore, en désignant par p le demi-périmètre du triangle,

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

c'est-à-dire que *l'aire d'un triangle rectiligne est égale à la racine carrée du produit qu'on obtient en multipliant le demi-périmètre par les trois excès de ce demi-périmètre sur chacun des côtés.*

Représentons maintenant par R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle a, b, c; on aura

$$R = \frac{abc}{4T}, \qquad r = \frac{2T}{a+b+c}.$$

La seconde formule se vérifie à la seule inspection de la

la figure, lorsque l'on mène par le centre du cercle inscrit des droites aux trois sommets du triangle; et la première formule s'obtient sans difficulté, en remarquant d'abord que l'on a $T = \frac{1}{2} bc \sin A$, et que si par le sommet B du triangle inscrit, l'on mène un diamètre $BA' = 2R$, le triangle inscrit CA'B, qui sera essentiellement rectangle en C, donnera $\sin A' = \frac{a}{2R}$; or, $A' = A$, puisque ces deux angles inscrits sont appuyés sur la même corde a; donc $T = \frac{abc}{4R}$.

Propriétés du Triangle sphérique.

4. Si, comme pour le triangle rectiligne, les côtés d'un triangle sphérique quelconque sont désignés par a, b, c, et que les angles opposés le soient par A, B, C; on aura, en supposant le rayon des tables égal à l'unité,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B,$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C;$$

formules qui donneraient un côté en fonction des deux autres et de l'angle qu'ils comprennent. Celles-ci, combinées entre elles d'une manière convenable, conduisent à ces trois autres,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$
$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b,$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,$$

lesquelles feraient connaître un angle au moyen des deux autres et du côté compris.

Lorsque le triangle sphérique est rectangle, on a, par exemple, $A = 1^{Q}$; ainsi le cosinus de l'hypoténuse a pour valeur

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Dans la même hypothèse,

$$\sin b = \sin a \sin B, \quad \cos B = \frac{\tang c}{\tang a}, \quad \tang B = \frac{\tang b}{\sin c},$$

$$\sin c = \sin a \sin C, \quad \cos C = \frac{\tang b}{\tang a}, \quad \tang C = \frac{\tang c}{\sin b},$$

$$\cos a = \cot B \cot C, \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}, \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

Dans le cas général, si Σ désigne l'aire d'un triangle sphérique, on a

$$\Sigma = A + B + C - 2^{Q};$$

expression qui suppose que le quadrant est pris pour unité de mesure des angles A, B, C, et que le triangle tri-rectangle ou le quart d'un hémisphère est pris pour unité de surface. Pour avoir l'aire T d'un triangle en mesures carrées, soient ρ le rayon de la sphère à laquelle ce triangle appartient, et π le rapport de la circonférence au diamètre; on aura

$$T = \tfrac{1}{2}\pi\rho^2\Sigma,$$

formule dans laquelle Σ doit être un nombre abstrait; par exemple, si Σ était donné en degrés, il faudrait remplacer ce facteur par $\frac{\Sigma}{90}$, parce qu'alors $1^{Q} = 90^{\circ}$.

La valeur de Σ est susceptible de différentes formes rationnelles et irrationnelles; savoir,

$$\sin \tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C}{\cos \frac{1}{2} c}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c},$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos C}{\cos \frac{1}{2} c}$$

$$= \frac{\cos^2 \frac{1}{2} a + \cos^2 \frac{1}{2} b + \cos^2 c - 1}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c},$$

$$\tang \tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{\tang \frac{1}{2} a \tang \frac{1}{2} b \sin C}{1 + \tang \frac{1}{2} a \tang \frac{1}{2} b \cos C};$$

enfin,

$$\tang \tfrac{1}{4}\Sigma = \sqrt{\left[\tang \frac{s}{2} \tang\left(\frac{s-a}{2}\right) \tang\left(\frac{s-b}{2}\right) \tang\left(\frac{s-c}{2}\right)\right]};$$

formules dans lesquelles on a $2s = a + b + c =$ double du périmètre du triangle.

Si R et r sont les rayons du cercle circonscrit et du cercle inscrit au triangle ABC, on a

$$\tang R = \frac{4 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}}$$

$$= \frac{\tang \frac{1}{2} a \tang \frac{1}{2} b \tang \frac{1}{2} c}{\sin \frac{1}{2} \Sigma},$$

$$\tang r = \frac{\sqrt{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{\sqrt{\sin s}}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Sigma \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}{\sin s}.$$

Revenons maintenant à notre objet, et, pour cela, donnons une idée des instrumens qui servent pour mesurer les angles sur le terrain.

Description du Graphomètre.

5. Le graphomètre, qui n'est plus guère en usage que parmi les arpenteurs, est un demi-cercle de cuivre divisé en 180° ou en 200^{gr}. Chaque degré ou grade est lui-même divisé en deux ou plusieurs parties égales, selon la grandeur du diamètre de ce demi-cercle.

La partie circulaire sur laquelle sont tracées les divisions se nomme le *limbe*. Les graphomètres ordinaires portent aux extrémités du diamètre fixe deux *pinnules* ou petites fenêtres au travers desquelles on regarde les objets. Chaque pinnule, qui doit être exactement perpendiculaire au limbe, est fendue par le haut et ouverte par le bas, ou réciproquement; et le milieu de l'ouverture est traversé dans le sens de sa longueur par une soie ou par un crin. Lorsqu'on vise

à un objet l'on a soin de mettre près de l'œil la fente d'une pinnule par laquelle on regarde si le fil correspondant couvre cet objet.

La règle mobile, que l'on nomme *alidade*, est assujettie à tourner autour du centre de l'instrument, et est garnie de même de deux pinnules. Pour mesurer les angles avec plus de précision, on a imaginé de tracer des parties plus petites que celles du limbe aux extrémités de cette alidade et près des pinnules. C'est à l'aide de ces petites divisions ou de ce *vernier* que l'on estime les parties du degré ou du grade. Supposons, par exemple, que le graphomètre soit divisé en 400 parties égales, dont deux forment le grade, et que 9 de ces parties correspondent à 10 parties du vernier; alors chacune de ces dernières embrassera, sur le limbe, un arc de $\frac{9 \times 50'}{10} = 45'$ centésimales. Si donc le premier trait du vernier, que l'on nomme *ligne de foi*, tombe exactement sur une ligne du limbe, l'angle compris entre le diamètre fixe et le diamètre mobile sera mesuré par le nombre des parties du limbe. Si, au contraire, le second trait du vernier coïncide avec une ligne du limbe, il faudra, au nombre de grades marqués sur le limbe jusqu'à la ligne de foi, ajouter 5′, quantité dont une partie du limbe excède une partie du vernier. En général, on comptera de plus autant de fois 5′ qu'il y aura de parties du vernier depuis la ligne de foi jusqu'à la ligne qui correspond à l'une de celles du limbe. Pour pouvoir lire plus aisément les divisions et prendre leurs parties par *estime*, on se sert d'une loupe qui grossit les objets.

Lorsqu'on fait coïncider exactement les deux axes optiques, une des lignes de foi doit correspondre précisément au zéro de la graduation si l'instrument est bien centré; mais il n'est pas rare d'observer un petit écart à droite ou à gauche de ce point. Cet écart évalué en parties du degré, est ce qu'on nomme l'*erreur de parallélisme* ou de *collimation*. Cette erreur est une constante qui affecte tous les

angles mesurés ; elle est additive ou soustractive, selon que la ligne de foi qui devrait marquer exactement zéro, est en arrière ou en avant de ce point par rapport au sens de la graduation.

Les graphomètres les meilleurs et les plus commodes, sont ceux qui sont garnis de lunettes que l'on fait mouvoir à l'aide de vis de rappel, et que l'on arrête au moyen de vis de pression. Quand les lunettes peuvent s'incliner de quelques grades à l'égard du limbe, on est dispensé de réduire à l'horizon les angles qui n'y sont pas situés, parce qu'alors on observe dans ce plan.

Dans tous les instrumens de cette espèce, chaque lunette n'ayant que deux verres, les objets paraissent très nettement, mais dans une situation renversée; ainsi, la partie de droite est vue à gauche, et la partie la plus haute paraît la plus basse. Le petit tube qui porte l'oculaire s'enfonce plus ou moins dans le canon de la lunette, selon que l'exige la vue de l'observateur. Quand les objets paraissent très distincts, il faut que les fils du réticule situés près de l'oculaire, paraissent eux-mêmes comme deux lignes noires, l'une horizontale, l'autre verticale, sans quoi ces fils ne seraient pas placés exactement au foyer de la lunette; mais par le mouvement d'arrière ou d'avant dont ils sont doués, on les ramène aisément à ce foyer.

Il est utile qu'un niveau à *bulle d'air* soit adapté à la lunette inférieure pour pouvoir la disposer horizontalement lorsque l'on mesure des angles de hauteur. L'axe du tube de verre qui renferme de l'alcool ou de l'éther étant mis parallèlement à l'axe optique de la lunette, il s'ensuit, d'après les lois de l'Hydrostatique, que lorsque la bulle d'air occupe le milieu de ce tube, l'axe optique de la lunette est horizontal.

Tout l'instrument porte sur un pied construit de manière qu'il est facile d'incliner le limbe dans tous les sens. Pour éviter à cet égard beaucoup de lenteur et de tâtonnemens,

on dispose le mieux qu'il est possible, dans la direction des objets que l'on observe, les vis qui produisent cette inclinaison.

Description du petit Cercle répétiteur.

6. L'une des différences remarquables, entre le graphomètre et le cercle répétiteur, est que les deux lunettes de celui-ci sont mobiles ou fixes à volonté. La lunette supérieure entraîne de même deux verniers, et son axe répond précisément au centre du limbe. A l'égard de la lunette inférieure qui porte un petit niveau à bulle d'air, elle est excentrique et elle tourne seule, si l'on veut, autour du pivot de l'instrument.

Le plus grand avantage du cercle répétiteur est de pouvoir atténuer presque entièrement les erreurs de la division et celles des observations, en répétant suffisamment la mesure des angles, comme nous l'enseignerons bientôt.

Dans les petits cercles répétiteurs, le pivot qui supporte le limbe est soudé au centre d'un plateau circulaire auquel on peut procurer un mouvement de rotation lent ou rapide. Ce pivot est traversé par un axe ou essieu dont les extrémités entrent dans des collets faisant partie de deux montans auxquels on a donné le nom de *fourchette*. Un petit quart de cercle adapté au pivot s'appuie contre ces montans et s'y fixe au moyen d'une pince, quand on veut que l'inclinaison du limbe soit invariable. Enfin, vers la partie supérieure de la douille de l'instrument sont placées deux vis opposées qui servent pour incliner le limbe dans un sens contraire à celui pour lequel le quart de cercle est destiné.

Il y a déjà plus de trente ans que l'usage de ce précieux instrument, inventé par Borda, est répandu en France et dans plusieurs contrées de l'Europe. C'est principalement dans les grandes opérations géodésiques, comme celles qui ont pour objet la mesure d'un arc de méridien, ou le levé

trigonométrique d'un grand état, que le cercle répétiteur est indispensable. *Voyez*, sur ce sujet, mon *Traité de Géodésie*, 2e édition, et la *Base du système métrique*, par Delambre.

De la mesure des angles avec le graphomètre.

7. [Fig. 1.] Pour mesurer, avec le graphomètre, l'angle A sous lequel on voit la distance BC, placez d'abord le centre de l'instrument au point A; puis disposez l'alidade fixe de manière que, regardant au travers des pinnules ou de la lunette, le fil vertical couvre le point C. Enfin, dirigez l'alidade mobile ou la lunette supérieure sur l'objet B; l'arc parcouru par celle-ci sera la mesure de l'angle A, sauf à tenir compte de l'erreur de collimation s'il y a lieu (n° 5).

Cette méthode suppose que les trois points A, B, C, sont à très peu près dans le même plan horizontal, ou que le cercle porte des pinnules, ou bien qu'il est garni de lunettes plongeantes (n° 5). Autrement, si les points B, C étaient hors de l'horizon de l'observateur, et que les lunettes n'eussent point la propriété dont il s'agit, il faudrait placer le limbe dans le plan même de l'angle à mesurer.

L'angle sous lequel on voit l'élévation d'un objet situé au-dessus de l'horizon du lieu où l'on observe, se nomme *angle de hauteur;* et l'angle sous lequel on voit l'abaissement d'un objet au-dessous de l'horizon, se nomme *angle de dépression.* Ainsi, en supposant que AH soit horizontale [Fig. 2], l'angle BAH est un angle de hauteur, et l'angle B′AH est un angle de dépression.

Pour mesurer ces angles verticaux, on donne au plan de l'instrument la position verticale à l'aide d'un fil-à-plomb. Ensuite on met la lunette fixe horizontalement par le moyen du niveau à bulle d'air qui y est adapté; puis l'on dirige la lunette supérieure sur l'objet B ou B′, de manière que le fil horizontal de cette lunette couvre le point de mire. Alors

l'arc parcouru par cette lunette est la mesure de l'angle BAH, ou B'AH. Cela suppose toutefois que l'artiste a eu le soin de dégager la lunette mobile de l'erreur de collimation, c'est-à-dire, de rendre exactement l'axe optique de cette lunette horizontal en même temps que le niveau, lorsque la ligne de foi est à zéro.

De la mesure des angles avec le cercle répétiteur.

8. Deux vérifications préalables sont à faire : 1° de s'assurer que les soies ou fils du *réticule* de chaque lunette n'offrent point de *parallaxe;* dans ce cas, leur image, lorsqu'elle se peint sur un objet distinct, ne change point de place à l'égard de cet objet, quand on éloigne un peu l'œil de l'axe optique. On fait disparaître la parallaxe en remettant les fils au foyer de la lunette, ou l'on évite l'erreur qu'elle occasionnerait en visant toujours au milieu de l'oculaire.

2°. De voir si les axes optiques des deux lunettes sont parallèles au plan du limbe. Comme il ne s'agit ici que des petits cercles répétiteurs, il sera suffisamment exact, après avoir dirigé les deux lunettes sur un même point éloigné, de faire coïncider les intersections des fils avec ce point, en tournant dans le sens convenable les vis de rappel des réticules. Il est utile à cet égard de prendre des renseignemens de l'artiste même qui a construit le cercle dont on se sert, afin de mieux concevoir les remarques précédentes.

Voici maintenant la manière de mesurer un angle entre deux objets terrestres, avec l'instrument actuel dont les divisions se lisent de gauche à droite.

Après avoir mis le limbe dans le plan des objets, on amène la lunette supérieure à zéro, et on la fixe par le moyen de la vis de pression. Ensuite on la dirige sur l'objet à droite; et pour l'y fixer, on serre la vis de pression du plateau. Cela fait, on rend mobile la lunette inférieure pour

l'amener sur l'objet à gauche; puis on la fixe au limbe. Ensuite on desserre la vis de pression du plateau, afin de pouvoir faire tourner tout l'instrument, jusqu'à ce que la lunette inférieure soit sur l'objet à droite. Lorsque cette circonstance a lieu, on serre de nouveau cette vis, et l'on amène la lunette supérieure rendue libre sur l'objet à gauche; alors l'arc qu'elle a parcouru depuis son premier point de départ, est la mesure du double de l'angle observé, sans aucune erreur de collimation (n° 5), puisque la lunette supérieure est partie exactement de zéro.

On obtient le quadruple, le sextuple, etc. d'un angle en répétant 2, 3, etc. fois cette opération, et partant du point de division où la lunette supérieure se trouve à la fin de chaque *observation conjuguée*.

On nomme *distance au zénit* d'un objet, le complément de sa hauteur, ou sa dépression angulaire augmentée de 100 grades. Pour observer une distance au zénit, mettez le plan du cercle verticalement par le moyen d'un fil-à-plomb, et de manière que les divisions du limbe soient à votre droite. Amenez la lunette supérieure à zéro; fixez-la, puis dirigez-la sur l'objet en faisant tourner le limbe, et serrez la vis du plateau. Ensuite mettez la lunette inférieure horizontalement au moyen du niveau à bulle d'air, et, pour cet effet, servez-vous de la vis de rappel de cette lunette. Si, par cette opération, la lunette supérieure se dérange, ramenez-la doucement sur le point de mire en faisant tourner la vis tangente du plateau, et rappelez la bulle au milieu du tube, c'est-à-dire calez le niveau. Cela fait, amenez le limbe à votre gauche, dans le vertical de l'objet; remettez la lunette inférieure horizontalement en faisant tourner le limbe par le moyen de la vis tangente du plateau. Enfin, ramenez sur l'objet la lunette supérieure rendue libre; et l'arc qu'elle aura parcouru sera, sans erreur de collimation, le double de la distance au zénit cherchée, ainsi qu'il est aisé de le prouver.

Le cercle répétiteur peut être employé de la même manière que le graphomètre; car il ne s'agit que d'amener la lunette inférieure à zéro, et de l'y fixer pendant tout le cours des observations. Pour cet effet, l'on met la lunette supérieure à ce point; et après avoir fixé, avec cette lunette, un objet éloigné, on y dirige aussi la lunette inférieure, laquelle se trouve dans ce cas placée convenablement, soit pour la mesure des angles horizontaux, soit pour celle des angles verticaux; mais la mesure de ces dernières serait nécessairement affectée de l'erreur de collimation si l'axe optique de la lunette inférieure n'était pas horizontal en même temps que le niveau; ce qu'il est facile de reconnaître, en mesurant avec soin une distance zénitale par la première méthode qui est exempte de l'erreur dont il s'agit, et par cette seconde méthode, qui doit, à très peu de chose près, procurer le même résultat, plus ou moins l'erreur de collimation.

9. Lorsque le cercle répétiteur porte des lunettes plongeantes, on dispose toujours le limbe horizontalement, à l'aide de deux niveaux disposés à angle droit; par ce moyen, les angles observés entre les objets terrestres, sont réduits sur-le-champ à l'horizon, ce qui dispense de faire aucun calcul à cet égard. Mais il n'y a guère que les *théodolites* qui jouissent de cette propriété. Dans ces instrumens, la lunette inférieure sert simplement de repère : on la fixe sur un point quelconque de l'horizon, tandis que la lunette supérieure arrêtée d'abord à zéro, est dirigée sur un des objets, ensuite est détachée du limbe pour être fixée sur le second objet. On conçoit en effet que, par cette manœuvre, la lunette supérieure a parcouru l'arc qui mesure horizontalement l'angle observé; mais parce que cette lunette peut être ramenée sur le premier objet sans être détachée du limbe, puis dirigée sur le second objet sans que le limbe gradué acquière aucun mouvement, il s'ensuit que le vernier de la lunette marque alors le double de l'angle; et comme

rien n'empêche de continuer indéfiniment cette opération, on a ainsi 1, 2, 3, 4,... fois l'angle horizontal cherché.

Les théodolites répétiteurs exigent plusieurs vérifications préalables que nous avons indiquées dans notre *Traité de Géodésie*.

A la rigueur, les angles horizontaux ou ceux observés entre les objets terrestres auraient besoin d'une petite correction due à l'*excentricité* de la lunette inférieure du cercle répétiteur; mais il est rare que l'on soit obligé d'en tenir compte, même dans les opérations les plus délicates de la Géodésie. Il est cependant des réductions indispensables qu'il importe de faire connaître : c'est ce que l'on va voir dans les deux chapitres suivans.

CHAPITRE II.

De la réduction des angles au centre de la station.

Centres visibles et accessibles.

10. Lorsqu'on lève la carte d'un pays, on n'est pas toujours le maître de placer à son gré des signaux commodes pour l'observation, tels que ceux qui sont formés de pyramides creuses, ou d'un assemblage de longues files de bois garnies de feuillages, et disposées en forme de cônes alongés, de manière que l'intérieur soit entièrement libre; il faut souvent, au contraire, profiter des clochers, des tours, ou d'autres objets élevés qui peuvent être considérés comme les sommets des angles des triangles du réseau : de là la fréquente nécessité d'observer à quelque distance de l'axe du signal, ou de placer le cercle au-dessus ou au-dessous du point de mire. Mais comme dans les petites opérations géodésiques on emploie presque toujours pour signaux de longues perches bien droites fichées en terre, on les ôte pour pouvoir y placer le centre de l'instrument, et on les replace ensuite s'il est nécessaire. Voici la méthode que l'on emploie dans le cas contraire, et lorsque le centre de la station est visible et accessible.

[Fig. 3.] Soit C le centre de la station, et O celui de l'instrument ou le sommet de l'angle observé AOB. On

demande la valeur de l'angle ACB, qui est la réduction du premier.

Faisons les données

$$AOB = O, \quad BOC = y, \quad CO = r, \quad BC = G, \quad AC = D,$$

et l'angle inconnu $\quad ACB = C.$

Puisque l'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux intérieurs opposés, on a, par rapport au triangle IAO,

$$AIB = O + IAO;$$

et par rapport au triangle BIC,

$$AIB = C + CBO;$$

égalant ces deux valeurs, on obtient

$$C = O + IAO - CBO.$$

D'un autre côté, on a

$$\sin CAO = \frac{r \sin (O + y)}{D}, \quad \sin CBO = \frac{r \sin y}{G};$$

mais les angles CAO, CBO étant toujours fort petits, leurs arcs peuvent être pris pour leurs sinus; donc

$$C = O + \frac{r \sin (O + y)}{D} - \frac{r \sin y}{G}.$$

Au moyen de cette formule, la réduction C — O serait donnée par un arc exprimé en parties du rayon pris pour unité; pour l'avoir en secondes, il est donc nécessaire de multiplier cet arc par R″, c'est-à-dire, par le nombre de secondes contenues dans un autre arc du même cercle égal au rayon; ainsi on a

$$C - O = \frac{R'' r \sin (O + y)}{D} - \frac{R'' r \sin y}{G}. \qquad (1)$$

Selon que l'on fait usage de l'ancienne ou de la nouvelle division de la circonférence, R″ = 206264″,8, ou.....

$R'' = 636619'',8$. On a même à très peu près $R'' = \frac{1}{\sin 1''}$: pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que le sinus d'une seconde, vu sa petitesse, pouvant être pris pour l'arc même, on a sensiblement $\frac{1}{\sin 1''} = \frac{1}{\text{arc } 1''}$; mais.....

$\frac{1}{\text{arc } 1''} = R''$ exactement; donc $R'' = \frac{1}{\sin 1''}$.

L'usage de la formule précédente ne peut être embarrassant dans aucun cas, pourvu qu'on ait égard aux signes de $\sin(O + y)$ et de $\sin y$; ainsi le premier terme de la correction sera positif si l'angle $O + y$ est compris entre o et 200^{gr}, et il deviendra négatif s'il surpasse 200^{gr}. Le contraire aura lieu dans les mêmes circonstances, pour le second terme qui dépend de l'*angle de direction* y.

Il est remarquable que D est la distance à l'objet de droite, et G la distance à l'objet de gauche. Quant à l'angle y, c'est toujours celui sous lequel paraissent le centre de la station et l'objet de gauche; ainsi, quand on a mesuré l'angle AOB, et que la graduation est numérotée de gauche à droite, comme sur tous les cercles français, la lunette supérieure est dirigée sur l'objet à gauche B, et l'inférieure sur l'objet à droite A; alors celle-ci restant fixée sur A, si l'on fait mouvoir la lunette supérieure de droite à gauche, jusqu'à ce que son axe réponde au point C, l'arc qu'elle aura parcouru sur le limbe sera la mesure de l'angle y, qui doit toujours se compter suivant l'ordre des divisions de l'instrument, et dont la valeur peut aller depuis o jusqu'à 400^{gr}. Cet angle ne devant pas être mesuré avec une très grande précision, l'on dirige seulement le mieux possible sur le centre C la lunette supérieure rendue libre, en fixant deux points marqués sur le haut du tube, l'un près de l'oculaire, l'autre près de l'objectif. Quant à la distance r, elle doit être mesurée avec exactitude, et à l'aide d'un cordeau.

Si plusieurs angles consécutifs O, O', O'', O''', etc., étaient

situés dans un même plan, oblique à l'horizon si l'on veut, on les réduirait tous au centre C, à l'aide d'un seul angle de direction y, et de la distance au centre r; alors, par rapport à l'angle O′, l'angle de direction serait

$$y' = y + O;$$

par rapport à O″,

$$y'' = y' + O' = y + O + O';$$

par rapport à O‴,

$$y''' = y'' + O'' = y + O + O' + O'';$$

et ainsi de suite.

Donnons maintenant un exemple du calcul de la réduction au centre, et mettons l'équation (1) sous cette forme :

$$r = R''r\left(\frac{\sin(O+y)}{D} - \frac{\sin y}{G}\right),$$

en faisant $\epsilon = C - O$.

Soit l'angle observé	$O = 48^{gr},756$
l'angle de direction	$y = 294,1$
la distance au centre	$r = 3^{m},257$
la distance à l'objet de droite	$D = 17528^{m}$
la distance à l'objet de gauche	$G = 20345$

Ces deux dernières distances se calculent par approximation; c'est ce que nous verrons bientôt.

	1er terme de la correction.		2e terme.
	log R″ 5,80388		
	log r 0,51282		
	+ 6,31670		− 6,31670
	log sin (O + y) − 9,89310	log sin y − 9,99807	
	comp. log D 5,75627	comp. log G 5,69154	
	− 92″,483 − 1,96607	+ 101″,465 + 2,00631	
	Première partie	− 92 ,483	
	Réduction ε =	+ 8 ,982	
	Angle observé O =	$48^{gr},7560$,	
	Angle réduit au centre C =	48 ,7568 ,982	

Pour déterminer le signe de chaque résultat partiel, il faut avoir égard à la règle des signes employée dans la multiplication; ainsi quand les facteurs négatifs sont en nombre impair, le produit doit être affecté du signe négatif : c'est le contraire lorsque les facteurs négatifs sont en nombre pair.

Centres invisibles des tours à bases circulaires.

11. [Fig 4.] Il arrive souvent que les centres des clochers, des tours, etc., au-dedans ou au-dehors desquels on observe, sont invisibles. Voici les moyens les plus simples pour lever cet obstacle.

Si l'on est placé en O extérieurement à la tour circulaire TzT′, on mènera les tangentes OT, OT′ sur lesquelles on prendra deux distances égales et arbitraires Ox, Ox', de manière cependant que la ligne xx' soit le plus près possible de la tour dont C est le centre : on fera $mx = mx'$, et Om sera évidemment dans la direction de ce centre. On observera alors l'angle COB $= y$, et à la distance Oz on ajoutera le rayon Cz pour avoir CO $= r$.

S'il était impossible de mesurer le rayon ou la circonférence du cercle TzT′, on mesurerait l'une des tangentes, OT, par exemple, et l'on aurait

$$Oz = \frac{\overline{OT}^2}{Oz'};$$

puisque toute tangente au cercle est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure. Le reste de l'opération n'a maintenant aucune difficulté.

Il est à propos de remarquer que l'on peut avoir encore l'angle y sans connaître la direction de la sécante Oz'; car on a $COB = \frac{TOB + T'OB}{2}$; ainsi l'on fera coïncider d'abord l'axe de la lunette supérieure avec la tangente OT, ensuite avec la tangente OT′, et l'on tiendra compte chaque

fois du nombre de grades marqué par cette lunette, qui doit toujours marcher de droite à gauche.

Lorsqu'on sera placé dans l'intérieur d'une tour circulaire, on fera en sorte de placer le centre de l'instrument sur le milieu de la corde qui passe par ce point, et la perpendiculaire à cette corde sera la direction du centre de la tour. Alors en mesurant cette même corde et la flèche de l'arc qu'elle soutend, il sera aisé de déterminer la distance au centre par la proposition 23 du Livre III de la *Géométrie* de M. Legendre.

Centres invisibles des tours à bases polygonales.

12. [Fig. 5.] Si l'on était en dehors de la tour rectangulaire DD′, en O par exemple, et que de ce point l'on pût voir les extrémités de l'une des diagonales DD′, dd', on aurait l'angle de direction COB $= y$, par la méthode suivante.

On mènera une droite parallèle à DD′, en partageant en parties proportionnelles les côtés OD, OD′ du triangle ODD′, et le milieu de cette parallèle sera sur la direction OC.

Autrement, on mesurera exactement la droite Op perpendiculaire à dD′, ainsi que la partie pm comprise entre Op et la perpendiculaire Cm imaginée abaissée du centre de la tour sur le côté d'D. Comme Cm est censé connu, on aura mq par la proportion

$$Cm + Op : pm :: Cm : mq;$$

ainsi la droite qO, dont la direction est maintenant déterminée, passera nécessairement par le centre C; on mesurera donc qO, et l'on aura

$$Cq = \sqrt{\overline{Cm}^2 + \overline{mq}^2};$$

et enfin,

$$r = qO + qC.$$

Ainsi, les deux élémens de la réduction de l'angle observé en O seront connus.

Il est visible que ce dernier procédé est général pour tous les polygones réguliers, soit que l'on observe dans l'intérieur, soit que l'on observe au-dehors; toute la difficulté consiste, lorsque le centre est inaccessible, à déterminer l'apothème Cm du polygone qui l'entoure, et c'est ce que la Géométrie enseigne.

Cependant s'il arrivait que l'on ne pût mener la perpendiculaire Op, on tirerait la droite Om, et l'on éleverait à Dp une perpendiculaire vers le milieu de pm. La partie de cette perpendiculaire interceptée dans le triangle COm sera facile à déterminer par la théorie des lignes proportionnelles; on aura donc la direction du rayon OC, et ce moyen est aussi général que le précédent.

Il est évident que tout ce qui vient d'être dit relativement aux tours rondes ou polygonales, s'applique mot pour mot aux poutres verticales qui peuvent embarrasser le centre de la station.

Quand le signal sur lequel on dirige un rayon visuel a, par exemple, la forme d'un parallélépipède, et qu'il présente obliquement à ce rayon une de ses faces éclairées, il en résulte qu'un des côtés de l'angle observé, passant par le milieu de la face dont il s'agit, s'éloigne un peu du centre du signal; par conséquent, cet angle a besoin d'une très petite correction. Mais le plus souvent l'on ne tient aucun compte de cette correction, due à ce qu'on appelle la *phase* du signal; parce qu'on l'évite en pointant sur le milieu même de ce corps, si on voit tant la partie éclairée que celle qui est dans l'ombre.

13. La réduction au centre de la station exigeant la connaissance approchée des distances entre les signaux, on résout d'abord les triangles comme si les observations avaient été faites aux centres mêmes des stations.

[Fig. 8.] En supposant, par exemple, que dans le réseau trigonométrique ABCDE..... le côté AB soit donné par un levé fait antérieurement à celui-ci, ou qu'il ait été

réellement mesuré; on résoudra le premier triangle à l'aide de ces deux proportions :

$$\left.\begin{array}{l}\sin C : \sin A :: AB : BC \\ \sin C : \sin B :: AB : AC\end{array}\right\} (1).$$

On passera ensuite à la résolution du deuxième triangle BCD, dans lequel le côté BC calculé sera pris pour base, et l'on procédera de même de proche en proche, jusqu'au dernier triangle FGH; mais dans ce calcul préliminaire, il suffit d'employer les logarithmes des côtés avec cinq décimales au plus.

On évite tout calcul en mesurant les distances avec l'échelle même du canevas trigonométrique, construit comme si les angles observés n'avaient besoin d'éprouver aucune réduction.

CHAPITRE III.

De la réduction des angles à l'horizon.

14. Les angles réduits au centre de la station se réduisent ensuite à l'horizon, quand les angles de position ne sont pas situés dans le plan de l'observateur; parce que comme dans le système de projection adopté pour représenter les positions respectives des objets, on ne considère que les distances horizontales, il est nécessaire, pour calculer sous ce point de vue les côtés des triangles, de réduire leurs angles dans le plan même de ces distances.

[Fig. 6] Soit z le zénit de l'observateur qui, du point C, a observé l'angle BCA incliné à l'horizon B'CA'; cet angle aura pour réduction ou *projection horizontale* l'angle B'CA' formé par les plans verticaux ACA', BCB', dans lesquels sont situés respectivement les signaux A, B.

Mais l'angle B'CA' est le même que l'angle sphérique z du triangle zab formé par trois arcs de grands cercles, dont l'un za est la distance au zénit de l'objet A; l'autre zb, la distance au zénit de l'objet B; et le troisième ab, la mesure de l'angle observé BCA. Donc si δ, δ' sont les distances au zénit connues za, zb, et que c soit l'angle BCA au centre de la station, l'on connaîtra les trois côtés du triangle sphérique abz; ainsi, en se conformant à la notation actuelle, l'angle z sera donné par cette formule, savoir :

$$\sin \tfrac{1}{2} z = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{c+\delta+\delta'}{2} - \delta\right) \sin\left(\frac{c+\delta+\delta'}{2} - \delta'\right)}{\sin \delta \sin \delta'}},$$

le rayon des tables étant égal à l'unité.

En effet, l'angle cherché étant celui d'un triangle sphérique dont on connaît les trois côtés, on a, n° 4,

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

d'où
$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b};$$

mais à cause de $2 \sin^2 \frac{1}{2} C = 1 - \cos C$, on a, en outre,

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C = 1 - \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b};$$

puis réduisant au même dénominateur, il vient

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos (a - b) - \cos c}{\sin a \sin b};$$

enfin, de ce que $\cos (a - b) - \cos c = 2 \sin \frac{1}{2} (c + b - a) \sin \frac{1}{2} (a + c - b)$, on a

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{1}{2} (b + c - a) \sin \frac{1}{2} (a + c - b)}{\sin a \sin b}$$

$$= \frac{\sin \left(\frac{a + b + c}{2} - a\right) \sin \left(\frac{a + b + c}{2} - b\right)}{\sin a \sin b};$$

formule qui est la même que celle ci-dessus, puisque $a = \delta$, $b = \delta'$, $C = z$.

Soient, pour application,

$$c = 65^{gr},4560, \quad \delta = 86^{gr},25, \quad \delta' = 85^{gr},40;$$

l'opération par les logarithmes sera, en désignant..... $c + \delta + \delta'$ par s,

Log $\sin \left(\frac{s}{2} - \delta\right)$ =	$32^{gr},303$	9,6865639
Log $\sin \left(\frac{s}{2} - \delta'\right)$ =	33 ,153	9,6968322
Comp. log sin δ.....		0,0102095
Comp. log sin δ'.....		0,0115224
		19,4051280
Log $\sin \frac{1}{2} z$.....		9,7025640

De là $\frac{1}{2} z = 33^{gr},6392$; $z = 67^{gr},2784$;

ainsi, la projection de l'angle c est de $67^{gr},2784$.

Il est bien rare que les distances au zénit soient aussi petites que dans l'exemple ci-dessus; et si elles ne différaient de l'angle droit que de deux ou trois grades, la formule précédente deviendrait trop pénible à calculer, pour avoir avec exactitude la projection de l'angle observé; il vaut mieux alors chercher la réduction, qui n'est que de quelques secondes. Cette réduction s'obtient par une formule à laquelle on parvient de la manière suivante.

Le triangle sphérique zab donnant (n° 4), en se conformant à la notation précédente,

$$\cos z = \frac{\cos c - \cos \delta \cos \delta'}{\sin \delta \sin \delta'},$$

on a, en faisant $\delta = 1^{Q} - \alpha$, $\delta' = 1^{Q} - \alpha'$,

$$\cos z = \frac{\cos c - \sin \alpha \sin \alpha'}{\cos \alpha \cos \alpha'};$$

mais $\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \ldots$, $\sin \alpha' = \alpha' - \frac{\alpha'^3}{6} + \ldots$,

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \ldots, \cos \alpha' = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \ldots;$$

substituant ces valeurs dans celle de $\cos z$, et ne conservant que les termes du second ordre, on a

$$\cos z = \frac{\cos c - \alpha\alpha'}{1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha'^2)} = (\cos c - \alpha\alpha')\left[1 - \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha'^2)\right]^{-1};$$

soit $z = c + x$; on a, en supposant x très petit,

$$\cos z = \cos(c + x) = \cos c - x \sin c;$$

égalant cette valeur à celle de $\cos z$ précédente, développée jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement, il vient

$$\cos c - x \sin c = \cos c - \alpha\alpha' + \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha'^2)\cos c;$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{\alpha\alpha' - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha'^2)\cos c}{\sin c};$$

d'ailleurs, à cause de

$$\cos c = \cos^2 \tfrac{1}{2} c - \sin^2 \tfrac{1}{2} c,$$

et de

$$\alpha\alpha' = \alpha\alpha'(\sin^2 \tfrac{1}{2} c + \cos^2 \tfrac{1}{2} c)$$

on a

$$x = \frac{(\alpha + \alpha')^2 \sin^2 \frac{1}{2} c - (\alpha - \alpha')^2 \cos^2 \frac{1}{2} c}{4 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c};$$

et enfin

$$x = \left(\frac{\alpha + \alpha'}{2}\right)^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c - \left(\frac{\alpha - \alpha'}{2}\right)^2 \cot \tfrac{1}{2} c.$$

Dans cette formule, $\alpha + \alpha'$ et $\alpha - \alpha'$ sont données en minutes ou secondes, tandis que ces quantités doivent être considérées comme des arcs comparés au rayon R pris pour unité; mais si l'on y met $\frac{\alpha + \alpha'}{R''}$, $\frac{\alpha - \alpha'}{R''}$ à la place de $\alpha + \alpha'$ et de $\alpha - \alpha'$, la correction x fera elle-même partie de ce rayon, et en la multipliant ensuite par R'', c'est-à-dire par le nombre de secondes contenues dans le rayon, on aura définitivement

$$x = \left(100^{gr} - \frac{\delta + \delta'}{2}\right)^2 \cdot \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} c}{R''} - \left(\frac{\delta - \delta'}{2}\right)^2 \cdot \frac{\cot \frac{1}{2} c}{R''};$$

formule que M. Legendre a donnée (page 423 de sa *Trigonométrie*, 12e édition). En voici le calcul,

Supposons que l'angle au centre

$$c = 56^{gr},9652,$$

et qu'il soit compris entre deux objets dont les distances au zénit sont

$$\delta = 98^{gr},2530$$
$$\delta' = 99\ ,0525$$

on aura $\delta + \delta' = 197^{gr},3055 \ldots \delta - \delta' = 0^{gr},7995$

$$100^{gr} - \frac{\delta + \delta'}{2} = 1,7472 = p, \quad \frac{\delta - \delta'}{2} = 0,3997 = q.$$

1er *terme positif.*	2e *terme négatif.*
Comp. log R'' = 4,19612	4,19612
log p^2 = 8,25886	log q^2 = 7,20347
l. tang $\frac{1}{2}c$ = 9,68111	l. cot $\frac{1}{2}c$ = 0,31889
+ 2,13609 = 136'',83	− 1,71848 = 52'',30
− 52 ,30	
Réduction x = + 84 ,53	
Angle réduit au centre c = 56gr,9652 ,00	
Angle réduit à l'horizon z = 56gr,9736 ,53.	

Nous avons donné dans le *Traité de Géodésie*, tome I, des tables qui abrègent considérablement ce calcul.

15. Après avoir réduit au centre et à l'horizon les trois angles d'un même triangle, on les corrige chacun du tiers de l'excès de leur somme sur deux angles droits. Les *angles moyens* qui résultent de cette opération sont ceux dont on fait usage pour résoudre rigoureusement les triangles.

Quand les triangles sont fort petits, l'excès dont il est question se compose entièrement des erreurs des observations, et il peut arriver même que cet excès se change en déficit; mais lorsque les distances entre les objets ont réellement une courbure sensible, ces triangles sont sphériques, parce qu'ils appartiennent à la surface de la terre consi-

dérée comme telle. Alors cet excès est une fonction des erreurs des observations et de l'excès de la somme des trois angles d'un triangle sphérique sur deux angles droits. Cependant, par le beau théorème de M. Legendre, démontré page 424 de sa *Trigonométrie*, et qui le sera d'une autre manière au n° 19 de ce Recueil, la résolution d'un triangle de cette espèce et très peu courbe d'ailleurs, se ramène à la résolution d'un triangle rectiligne, en suivant la règle que nous venons de prescrire.

CHAPITRE IV.

De la détermination des distances et de leur orientation.

Mesure des bases.

16. Puisque les triangles dont le canevas d'une carte est formé, sont liés les uns aux autres, il s'ensuit, comme nous l'avons déjà dit, qu'il suffit à la rigueur de connaître ou de mesurer un seul de leurs côtés pour pouvoir calculer toutes les distances entre les signaux. La mesure de ce côté ou de cette base est une des opérations les plus délicates et les plus importantes de la Géodésie, et son exactitude doit être subordonnée à celle de la mesure des angles. Il est essentiel qu'une base ne soit pas trop petite, qu'elle soit établie sur un terrain de niveau, ou plutôt que la ligne géodésique qui la représente soit droite, et que sa longueur comparée à une unité de mesure parfaitement connue, soit réduite à l'horizon.

Dans les levés ordinaires, on se sert de perches que l'on met bout à bout dans la direction d'une droite tracée avec des jalons garnis d'un petit carré de papier blanc à leur extrémité supérieure, pour servir de point de mire. On a au moins deux de ces perches dont chacune a exactement deux mètres de longueur, et dont les abouts sont revêtus d'un bouton de fer ou de cuivre. Communément on les dispose horizontalement sur des soles de bois, quand le terrain est très peu incliné; mais si la base est établie sur un terrain

oblique à l'horizon, il est plus commode de mesurer la longueur même de chacune des pentes comprises dans l'étendue de cette base; et après avoir estimé leur inclinaison, soit avec le cercle répétiteur, soit par d'autres moyens que nous indiquerons par la suite, on réduit les mesures à l'horizon à l'aide de la formule suivante :

Soit k la longueur de la ligne droite mesurée, i son inclinaison, et x sa projection horizontale; on aura évidemment par la propriété du triangle rectangle (n° 3),

$$x = k \cos i.$$

Mais comme le plus souvent l'angle i est fort petit, il est plus commode de calculer l'excès de k sur x : alors on a

$$k - x = k\,(1 - \cos i) = 2k \sin^2 \tfrac{1}{2} i.$$

Ainsi, la quantité qu'il faut ôter de la longueur mesurée pour la réduire à l'horizon, est égale à deux fois cette longueur multipliée par le carré du sinus de la moitié de l'angle d'inclinaison.

Il importe de mesurer deux fois la même base et de prendre pour véritable ligne géodésique la *moyenne* entre les deux longueurs obtenues, quand leur différence tombe dans les limites des erreurs possibles des mesures; et si l'on vise à une grande précision, il est essentiel de mesurer une base de vérification loin de la première, afin de s'assurer si les résultats fournis par les calculs des triangles s'accordent avec ceux qui dérivent de mesures prises sur le terrain.

Pour des plans de petits domaines, il est assez exact de mesurer les lignes principales d'opérations avec une chaîne de 5 ou de 10 mètres; mais avant de s'en servir, il faut la vérifier sur un étalon, et lui donner environ 2 centimètres de plus que 10 mètres, vu qu'il est impossible de la tendre rigoureusement en ligne droite; d'ailleurs on risquerait, en voulant atteindre cette limite, d'en rompre les anneaux.

Ces lignes d'opérations se mesurent aussi avec assez d'exac-

titude et avec la plus grande facilité, à l'aide d'un instrument auquel on a donné récemment le nom de *stadia*. C'est tout simplement une règle en bois peinte en blanc et divisée en parties égales par des traits et des points noirs très sensibles, qu'on dispose verticalement à l'une des extrémités d'une distance à mesurer, et que l'on regarde de l'autre extrémité avec une lunette armée à son foyer de deux fils horizontaux, afin de voir combien il y a de parties égales de la règle comprises entre ces fils. En effet, le nombre de ces parties croissant proportionnellement aux distances de la stadia à la lunette, il suffit de connaître combien il y a de parties interceptées entre les fils dont il s'agit à une distance donnée, pour savoir combien il y aurait de ces mêmes parties à toute autre distance, et réciproquement.

Les moyens que nous venons d'indiquer pour mesurer les bases, seraient insuffisans dans les grandes opérations géodésiques, où il est surtout nécessaire d'avoir égard à la dilatation des perches due à l'action de la chaleur. Ceux qui voudront connaître les meilleurs procédés à employer en pareille circonstance, les trouveront développés dans le grand ouvrage de Delambre, déjà cité, et dans notre *Traité de Géodésie*, tome I.

17. Voici maintenant comment on réduit une longue base au niveau de la mer.

[Fig. 7] Soit ρ le rayon de la terre réputée sphérique pour le niveau de la mer; $\rho + h$ le rayon pour le sol de la base AMB, supposé de niveau; h sera l'élévation Aa du sol au-dessus de la surface des eaux. Soit de plus B la base mesurée AMB, et b la base réduite amb.

Cela posé, puisque les arcs semblables sont entre eux comme leurs rayons, on aura

$$\frac{B}{b} = \frac{\rho + h}{\rho};$$

prenant la valeur de B, et ajoutant de part et d'autre $- b$, il viendra

$$B - b = \frac{Bh}{\rho + h} = \frac{\frac{Bh}{\rho}}{\left(1 + \frac{h}{\rho}\right)} = \frac{Bh}{\rho}\left(1 + \frac{h}{\rho}\right)^{-1};$$

puis développant la puissance négative, on aura

$$B - b = \frac{Bh}{\rho} - B\frac{h^2}{\rho^2} + B\frac{h^3}{\rho^3} - \ldots\ldots$$

Tel est l'excès de B sur b : nous apprendrons dans le chapitre suivant à déterminer h.

Tous les côtés des triangles que l'on calculera d'après la base réduite b, seront des arcs de grands cercles d'une même sphère. On ne peut se dispenser de faire cette réduction quand on veut comparer la longueur d'une base mesurée avec la longueur que fournit le calcul des triangles; mais pour les levés dont il s'agit dans le présent Ouvrage, cette réduction est absolument inutile; aussi ne l'avons-nous fait connaître que pour donner au lecteur une idée de ce qui se pratique dans la haute Géodésie.

Orientation des plans.

18. Un plan est *orienté* lorsque l'on connaît l'angle qu'une de ses lignes principales fait avec le méridien terrestre, parce qu'alors on peut assigner la place que les objets occupent à l'égard des quatre points cardinaux. Un des moyens faciles d'obtenir cet angle, est, pendant une belle nuit, de diriger la lunette supérieure du cercle répétiteur sur l'*étoile polaire*, après avoir disposé le limbe verticalement, comme pour prendre une distance au zénit (n° 8). On laisse cet instrument exactement dans cette position; et quand il fait jour, on fait mettre un signal un peu loin de l'observateur, de manière qu'il se trouve dans l'axe optique de la lunette ramenée à l'horizon : ensuite on observe l'angle entre ce signal et l'un des objets dont la position est connue sur la carte, ainsi que celle du lieu de l'observation. Cet

angle, que l'on nomme *azimut*, fait connaître la direction des côtés des triangles par rapport à la méridienne terrestre : le plan est donc orienté.

L'étoile polaire n'étant pas tout-à-fait située au pôle du monde (*Uranographie* de M. Francœur, page 236), il convient, pour plus d'exactitude, de l'observer au moment même où elle est dans le méridien : or, on a reconnu que ce moment arrive à très peu près lorsque cette étoile est dans le même plan vertical avec la première des trois étoiles de la queue de la *Grande Ourse*, la plus voisine du quadrilatère. Ainsi l'on saura, à l'aide d'un fil-à-plomb, lorsque cette circonstance aura lieu. Le succès de cette opération tient à l'habitude d'observer de nuit les étoiles. Pour les voir dans le champ de la lunette en même temps que les fils du réticule, il faut faire éclairer un peu l'objectif pendant que l'on a l'œil à l'oculaire. Avec cette précaution, il est facile d'amener l'étoile sous le fil vertical.

Les observations azimutales se font aisément avec un bon théodolite (*). Elles réussissent aussi en observant au cercle ordinaire une étoile brillante, telle que Sirius, dans deux plans verticaux et à la même hauteur au-dessus de l'horizon; c'est-à-dire, avant et après son passage au méridien. Il est nécessaire, dans ce cas, de mettre l'étoile à l'intersection des fils, et de lire l'arc intercepté entre les deux directions observées. La moitié de cet arc horizontal sera l'azimut de l'une des directions dont il s'agit, comme cela est évident.

La nature de cet Ouvrage ne comporte pas le développement des méthodes et calculs astronomiques dont il est préférable de faire usage pour déterminer exactement les azimuts des côtés d'une grande chaîne de triangles; mais l'on peut consulter sur ce sujet le *Traité de Géodésie*, tome II.

(*) Les théodolites et cercles répétiteurs que construit Gambey, l'un de nos plus habiles artistes en ce genre, ont toute la perfection désirable.

Calculs des côtés des triangles.

19. On a vu dans les numéros précédens comment, après avoir recueilli toutes les observations d'angles, on réduisait ces angles de manière que, dans chaque triangle, leur somme valût toujours deux angles droits; cette opération est fondée sur l'application du théorème de M. Legendre, cité au n° 15, et auquel on parvient très aisément par la considération suivante.

Supposons qu'au triangle sphérique, dont les données sont les deux côtés a, b, et les deux angles opposés A, B, corresponde le triangle rectiligne a, b, A′, B′; et que l'on ait $A' = A - x$, $B' = B - x$; on demande de déterminer x.

Par la propriété du triangle rectiligne,

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(A - x)}{\sin(B - x)},$$

mais à cause de la série connue,

$$\sin a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \text{etc.},$$

on a à très peu près, vu l'extrême petitesse de a, par rapport au rayon de la terre,

$$a = \sin a + \frac{a^3}{6} = \sin a\left(1 + \frac{a^2}{6}\right);$$

par conséquent,

$$\frac{\sin a\left(1 - \frac{a^2}{6}\right)}{\sin b\left(1 - \frac{b^2}{6}\right)} = \frac{\sin(A - x)}{\sin(B - x)} = \frac{\sin A}{\sin B}\cdot\left(\frac{1 - x\cot A}{1 - x\cot B}\right).$$

D'ailleurs le triangle sphérique correspondant donnant $\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}$, on a, en simplifiant, chassant les dénominateurs, et négligeant les quantités du 4e ordre,

$$x = \frac{a^2 - b^2}{6}\left(\frac{1}{\cot B - \cot A}\right) = \frac{a^2 - b^2}{6}\cdot\frac{\sin A \sin B}{\sin(A - B)},$$

valeur qui est précisément le tiers de l'aire du triangle sphérique considéré comme rectiligne (n° 3). Mais la somme des trois angles du triangle sphérique est (n° 4),

$$A + B + C = A' + B' + C' + \varepsilon = 2^{\text{o}} + \varepsilon,$$

ε étant l'aire de ce triangle, laquelle diffère extrêmement peu de celle du triangle rectiligne dont les côtés seraient a, b, c; de plus, à cause de $x = \frac{1}{3}\varepsilon$, on a

$$A' = A - \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad B' = B - \tfrac{1}{3}\varepsilon;$$

partant,

$$A + B + C = A - \tfrac{1}{3}\varepsilon + B - \tfrac{1}{3}\varepsilon + C' + \varepsilon,$$

et enfin,

$$C' = C - \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Maintenant, il est évident que si avec les données a, c, A, C, du triangle sphérique, on formait un second triangle rectiligne a, c, $A - y$, $C - y$, on aurait $y = x = \frac{1}{3}\varepsilon$, ou, ce qui est de même, ce second triangle serait égal au premier. Donc *tout triangle sphérique très peu courbe répond toujours à un triangle rectiligne qui a les côtés de même longueur, mais dont les angles opposés à ces côtés sont ceux du triangle sphérique, diminués chacun du tiers de l'excès de leur somme sur deux angles droits.*

L'excès sphérique ε, rapporté à une sphère du rayon $= 1$, a évidemment pour valeur $\frac{\alpha}{r^2}$, puisque α est l'aire du triangle proposé sur une sphère dont le rayon est r; ainsi, en général, cet excès est proportionnel à l'aire du triangle auquel il appartient. Pour l'avoir en secondes, il faut écrire

$$\varepsilon = \frac{\alpha R''}{r^2},$$

R'' étant le nombre de secondes comprises dans un arc égal au rayon.

Lorsque les angles de chaque triangle ont été réduits au centre et à l'horizon, ainsi qu'il a été enseigné précédem-

ment, et qu'on a obtenu leurs *valeurs moyennes*, on résout ces triangles par la méthode du n° 13, en faisant usage de logarithmes à 7 décimales. De cette manière, les distances cherchées sont déterminées avec toute l'exactitude possible.

Voici le type de ce dernier calcul :

Supposons que dans le triangle ABC [fig. 8] la base AB, mesurée et réduite au niveau de la mer, soit de $24107^{m},28$, et que l'on ait pour les angles réduits aux centres des stations et à l'horizon

$$\begin{aligned} A &= 68^{gr},03346 \\ B &= 62\,,07068 \\ C &= 69\,,89616 \\ \hline \text{Somme} &= 200\,,00030 \\ \text{Retranchant} & \quad 200 \\ \hline \text{L'excès sur deux angles droits} &= 0\,,00030 \end{aligned}$$

Désignant par A′, B′, C′ ces mêmes angles diminués chacun du tiers de cet excès, on trouve

$$\begin{aligned} A' &= 68^{gr},03336 \\ B' &= 62\,,07058 \\ C' &= 69\,,89606 \\ \hline \text{Somme} &= 200. \end{aligned}$$

Cela posé, les proportions (1) du n° 13 étant calculées par les logarithmes, on a

$$\begin{array}{rl} \text{Co. log sin } C' = & 0{,}0504811 \\ \log AB = & 4{,}3821482 \\ \log \sin A' = & 9{,}9427811 \\ \hline \log BC = & 4{,}3754104 \\ = & 23736^{m},15 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Comp. log sin } C' = & 0{,}0504811 \\ & 4{,}3821482 \\ \log \sin B' = & 9{,}9178747 \\ \hline \log AC = & 4{,}3505040 \\ = & 22413^{m},2. \end{array}$$

Dans la pratique, on ne saurait trop mettre de l'ordre dans les calculs, et chercher tous les moyens d'abréger les opérations : c'est dans cette vue que l'on pourrait disposer,

ainsi qu'il suit, les données et les résultats précédens dans des tableaux dont les titres seraient imprimés d'avance.

NOMS des signaux.	ANGLES HORIZONTAUX affectés de l'erreur de l'observation.	ANGLES HORIZONTAUX corrigés pour les calculs.	LOGARITHMES des sinus des angles.	CALCUL des côtés.	CÔTÉS en mètres.
				4,3821482	
A	68gr,03346	68gr,03336	9,9427811	0,0604811	23736m,15
				9,9427811	
B	62,07068	62,07058	9,9178747	4,3754104	22413,20
				4,4326293	
C	69,89616	69,89606	9,9495189	9,9178747	24107,28
	200,00030	200,00000		4,3505040	

Les mètres qui sont sur la même ligne que A expriment la longueur du côté opposé à cet angle, et ainsi des autres.

Dans l'exemple précédent, tiré du calcul d'une chaîne de triangles du premier ordre, les angles sont exprimés en dixièmes de secondes centésimales; mais il est inutile de s'attacher à une si grande précision, toutes les fois que l'on n'observe qu'avec des petits cercles de $0^m,16$ de diamètre. Je n'ai choisi cet exemple qu'afin de montrer comment on peut apprécier l'erreur des observations; car les 3″ d'excès trouvées ci-dessus n'expriment pas cette erreur seulement (n° 15). En effet, on sait par le théorème de M. Legendre (n° précédent) que l'excès sphérique ε d'un triangle très peu courbe, évalué en secondes, a pour valeur $\frac{\alpha R''}{r^2}$. Si donc l'on dénote par A, B, C, les angles du triangle, et par a, b, c les côtés qui leur sont opposés, l'aire α de ce triangle aura pour expression $\alpha = \frac{1}{2} bc \sin A$; et en vertu des données

précédentes, et de ce que $r = 6366198^{m}$,

$$\log\left(\frac{R''}{r^2}\right) = \log R'' - 2\log r = 2{,}196119,$$

on aura

$$\begin{aligned}
\log \tfrac{1}{2} &= 9{,}69897\\
\log b &= 4{,}37541\\
\log c &= 4{,}35050\\
\log.\sin A &= 9{,}94278\\
\hline
\log \alpha &= 8{,}36766\\
\log \text{constant} &= 2{,}19612\\
\hline
\log \epsilon &= 0{,}56378 = 3'',66
\end{aligned}$$

Ainsi la somme des erreurs commises dans la mesure des trois angles du triangle ABC n'est que de $0'',66$.

20. En Géographie l'on ne considère pas seulement les triangles sphériques très peu courbes. Par exemple, s'il s'agissait de déterminer la plus courte distance géographique de deux lieux quelconques du globe terrestre supposé de forme sphérique, c'est-à-dire l'arc de grand cercle qui joint ces deux points, l'on aurait à calculer le troisième côté d'un grand triangle sphérique dans lequel on connaîtrait deux côtés et l'angle compris.

D'abord, il est remarquable qu'un point est donné de position sur la terre par sa *latitude* et sa *longitude*, ou, ce qui est de même, par sa distance à l'équateur, et par l'arc de ce grand cercle compris entre le premier méridien et celui du point que l'on considère. Ainsi les distances de deux points à l'un des pôles de la terre sont deux côtés d'un triangle sphérique dont l'angle est égal à la différence des méridiens ou des longitudes, et le troisième côté est la distance que l'on cherche. Cela posé :

Trouver la plus courte distance de Paris au cap de Bonne-Espérance.

D'après l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, la latitude de l'Observatoire royal de Paris. ..... $= 48^\circ\ 50'\ 14''$.
De là, distance au pôle boréal..... $c = 41^\circ\ 9'\ 46''$.
Latitude australe du cap de Bonne-Espérance $= 33^\circ\ 55'\ 15''$; de là, distance au pôle boréal..... $b = 123^\circ\ 55'\ 15''$.
Longitude orientale du même point, comptée de Paris..... $A = 16^\circ\ 3'\ 45''$.

Soient donc A le pôle Nord, B Paris, C le cap de Bonne-Espérance; on aura, pour résoudre le triangle sphérique ABC, dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris, la formule

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Opérant par les logarithmes, on aura

1er *terme.*	2e *terme.*
$\log \cos b = 9,7466706\ -$	$\log \sin b = 9,9189783\ +$
$\log \cos c = 9,8767043\ +$	$\log \sin c = 9,8183583\ +$
$\log$ 1er t. $= 9,6233749\ -$	$\log \cos A = 9,9827055\ +$
	$\log$ 2e t. $= 9,7200421\ +$

De là,

$$1^{er} \text{ terme} = -\ 0,4201215$$
$$2^{e} \text{ terme} = +\ 0,5248584$$
$$\cos a = +\ 0,1047369, \log \cos a = 9,0200998.$$

Ainsi

$$a = 83^\circ\ 59'\ 16'',8.$$

Maintenant, pour évaluer l'arc a en myriamètres, on se rappellera que $90^\circ = 1000$ myriamètres; et l'on fera cette proportion :

$$90^\circ : 83^\circ\ 59'\ 16'',8 :: 1000 : x,$$

ou bien en décimales de degré,

$$90^\circ : 83^\circ,988 :: 1000 : x;$$

d'où enfin

$x = 933 \frac{8}{10}$ myriamètres, comme l'indique l'*Annuaire*.

21. Au lieu de former le canevas d'une carte, ainsi que le représente la figure 8, il est plus simple, lorsque l'on ne s'attache pas à une rigoureuse exactitude, de procéder de la manière suivante :

[Fig. 9.] Soient A, B, C, D, F, G, H, K, L, les points fondamentaux d'un plan, points qui sont représentés par des signaux naturels ou par des signaux artificiels que l'on établit convenablement en faisant la reconnaissance du pays (n° 10). On dessinera à vue tous les objets sur un *calepin* ou *brouillon* destiné à contenir les différentes mesures que l'on prendra dans le cours des opérations, et l'on y tracera la base AB des extrémités de laquelle on aperçoit la plupart des points ABC..... ayant soin toutefois que cette base ne soit pas trop petite à l'égard de sa distance aux points visibles. Ensuite on mesurera au point A avec le graphomètre, ou mieux encore avec le cercle répétiteur, les angles CAB, DAB, HAB, FAB, BAG. Si l'on se sert du graphomètre, il convient, pour plus de facilité et de précision, de diriger la lunette fixe sur le point B, et d'amener successivement la lunette mobile sur les points C, D, H, F, G. Ces observations étant faites à la première station A, on ira en faire de pareilles à la seconde station B ; c'est-à-dire qu'on relevera les angles CBA, DBA, HBA, FBA, GBA : enfin l'on mesurera la base AB par l'un des moyens qui sont expliqués plus haut.

On voit que de cette manière on connaîtra dans chacun des triangles ACB, ADB....., un côté et les angles adjacens; on calculera donc facilement les distances AC, CB, AD, DB....., à l'aide desquelles et de la base AB on déterminera ensuite, sur le *mis-au-net* et d'après l'échelle adoptée, les positions respectives des points A, C, D, H, B, G, F, soit

par la méthode si connue des intersections, soit par le moyen d'un *rapporteur* (1).

Il reste à placer sur la carte les points K, L, qui n'ont pu être aperçus du point A, mais qui peuvent l'être des points B, H : pour cet effet, l'on considérera la distance BH comme une nouvelle base qui servira pour lier ces nouveaux points au premier système, en observant les angles KHB, LHB, KBH, LBH; parce que l'on connaîtra de même dans les triangles KHB, LHB, deux angles et un côté. Il est évident qu'il n'est pas nécessaire de mesurer la distance BH, puisqu'elle est donnée par la résolution du triangle AHB.

Calcul des distances à la méridienne et à sa perpendiculaire, et usage de ces lignes pour former le canevas des opérations de détail.

22. Les deux méthodes que nous avons indiquées ci-dessus pour former le mis-au-net du canevas d'une carte, ne sont pas celles qui procurent la plus grande exactitude possible; parce que si la position d'un point dépend essentiellement de celle des autres points déjà placés, il arrive qu'une erreur commise dans la détermination graphique de l'un d'eux influe sur la position de tous les autres points subséquens. Mais en les fixant à l'aide de leurs distances à deux droites fixes, par exemple, à la méridienne du lieu principal de la carte et à sa perpendiculaire, on rend au-

(*) Le rapporteur est un demi-cercle de cuivre ou de corne, divisé en 180 degrés ou en 200 grades, et quelquefois en demi-grades, s'il est d'un grand diamètre : on en fait un fréquent usage pour rapporter sur le papier les angles mesurés sur le terrain. On s'en sert aussi pour mesurer un angle sur le papier, et voici comment on procède à ce sujet. On place le centre de cet instrument au sommet de l'angle à mesurer, et l'on fait coïncider son diamètre avec un des côtés de cet angle : alors le nombre de grades contenus dans l'arc compris entre les deux côtés est la mesure de ce même angle.

tant qu'il est possible leurs positions indépendantes les unes des autres. Cette méthode exige alors que l'on calcule les distances dont il s'agit, au moyen des triangles et de l'azimut observés.

[Fig. 10.] Pour fixer les idées à ce sujet, soient AX la méridienne du lieu A, et AY sa perpendiculaire; et supposons que les triangles AMM′, AmM′, etc... fassent partie d'un réseau trigonométrique : on demande les coordonnées des points m, M, M′, etc..., c'est-à-dire, les distances Ap, pm; AP, PM; AP′, PM′, etc... Si l'angle mAP est l'azimut observé (n° 18), il est clair que tous les triangles seront orientés, et que l'on connaîtra très aisément les autres azimuts MAP, M′AP′, puisque les angles MAM′, M′Am sont connus. Ainsi en menant, par les sommets de tous les triangles de la chaîne, des parallèles à la méridienne et à sa perpendiculaire, comme on le voit à l'inspection de la figure, et comme si la surface de la terre était plane, les côtés de ces triangles seront les hypoténuses de triangles rectangles que l'on pourra résoudre par le principe de l'art. 42 de la *Trigonométrie* de M. Legendre, ou de la même manière qu'au n° 15.

Par exemple, la résolution des triangles rectangles APM, AP′M′ donnera les valeurs des coordonnées des points M, M′; la résolution du triangle M′M″b fera de même connaître les distances bM″, bM′, et comme les coordonnées du point M″ sont AP″, P″M″, on aura

$$\mathrm{AP}' = \mathrm{AP}' + b\mathrm{M}', \quad \mathrm{P}''\mathrm{M}'' = \mathrm{P}'\mathrm{M}' - b\mathrm{M}''.$$

Pareillement lorsqu'on aura calculé les distances dM‴, dM⁗, on aura $\mathrm{AP}''' = \mathrm{AP}'' + d\mathrm{M}''$, $\mathrm{P}'''\mathrm{M}''' = \mathrm{P}''\mathrm{M}'' + d\mathrm{M}'''$, et ainsi du reste.

Lorsqu'on dresse un tableau de toutes ces distances, on a soin d'indiquer le sens dans lequel elles doivent être prises; et à cet égard, on peut adopter la convention établie dans la théorie des courbes, relativement aux signes.

C'est de cette manière que Cassini, pour former la carte du royaume, calcula les distances des sommets de ses triangles à la méridienne de l'Observatoire de Paris et à sa perpendiculaire. On trouvera à ce sujet, dans le *Traité de Géodésie*, 2e édition, une méthode plus rigoureuse, ainsi que des formules propres à faire connaître les latitudes et les longitudes de tous les lieux remarquables d'une contrée, qui seraient liés entre eux par un réseau de triangles.

Il est donc très facile d'établir, au moyen de ces coordonnées rectangles, le canevas des opérations de détail. On divise ce canevas en plusieurs rectangles égaux, comprenant chacun deux ou trois points trigonométriques, afin de pouvoir y lier les levés partiels et les coordonner entre eux. Le canevas de la carte, qui ne se compose que de triangles, est ordinairement construit à une très petite échelle; mais les feuilles destinées aux levés topographiques, et sur lesquelles les rectangles dont il s'agit ont été tracés, sont assujetties à une échelle beaucoup plus grande, afin que les objets les plus minutieux puissent y être exprimés nettement et sans confusion.

Les ingénieurs-géographes militaires donnent constamment aux feuilles-minutes d'une carte et aux feuilles de gravure, huit décimètres de longueur sur cinq décimètres de hauteur, non compris les marges; ce qui procure un format agréable et commode; mais le mode de projection adopté pour la nouvelle carte de France, n'est pas précisément celui dont il vient d'être question. Voici en peu de mots en quoi il consiste.

On sait qu'en Géographie, la distance d'un point à l'équateur, mesurée sur un méridien, ou sa *latitude*, et sa distance à un méridien fixe, mesurée sur son parallèle, ou sa *longitude*, en font toujours reconnaître la position. Pour représenter ces distances sur un plan, l'on est convenu, relativement à la nouvelle carte de France, de développer en ligne droite le méridien de Paris et tous les

parallèles, suivant des cercles concentriques ayant leur centre commun sur ce méridien, à une distance du point dont la latitude est de 50 grades ou 45 degrés, égale au rayon même de la terre. Il résulte de là que les parties de ces parallèles conservent exactement, comme celles du méridien principal, les rapports qu'elles ont entre elles sur le Globe. A l'exception du méridien de Paris, pris pour axe des x, tous les autres méridiens sont donc des courbes convergentes vers un même point de cet axe.

Quand les méridiens et les parallèles sont tracés sur une carte, on y fixe les principaux points au moyen de leur latitude et de leur longitude; mais faute de ces courbes, on fait usage des coordonnées rectilignes rectangles de ces mêmes points, calculées d'après des formules que nous ne pouvons rapporter ici, mais que nous avons publiées dans le *Traité de Topographie*, 2e édition, et simplifiées dans un Mémoire qui a pour titre : *Instruction sur l'usage des Tables de projection adoptées pour la construction du canevas de la nouvelle carte topographique de la France.* (Paris, 1821, au Dépôt de la guerre.)

CHAPITRE V.

Exposé des méthodes géométriques employées pour déterminer les différences de niveau.

23. La détermination des distances horizontales des principaux points d'un plan exige la série de tous les calculs précédens, et le but est rempli, si l'on n'a aucun besoin de connaître les différences de hauteur des stations; mais dans une foule de circonstances, cette connaissance est indispensable. S'agit-il, par exemple, de conduire des eaux d'un lieu à un autre, de régler les pentes d'une route, d'aplanir ou d'exhausser un terrain, ou bien d'en former le relief; il faut préalablement se rendre compte de la forme du sol dans le sens de ses trois dimensions. Je vais donner dans ce chapitre une idée des moyens géométriques que l'on emploie pour cet objet, et qui font partie de la science du *Nivellement.*

Deux ou plusieurs points sont de niveau entre eux lorsqu'ils sont également éloignés du centre de la terre. Quoique cette planète ne soit pas exactement sphérique, et qu'elle ait, au contraire, par suite de son mouvement de rotation, la figure d'un sphéroïde aplati vers les pôles et renflé vers l'équateur, on peut, dans les opérations ordinaires du nivellement, supposer cet aplatissement nul, et établir pour principe fondamental, qu'*une surface est de niveau, lorsqu'elle est parallèle à celle des eaux tranquilles des lacs ou des mers ;* car telle est la propriété des fluides en repos, que

leur surface libre fait partie de celle d'une sphère dont le centre est celui de la terre. Cependant, vu l'immense grandeur de son rayon, la surface des eaux circonscrites dans un très petit espace peut être considérée comme plane ou horizontale. Les perpendiculaires à cette surface sont donc censées parallèles. Ce sont, comme l'on sait, ces perpendiculaires que l'on nomme *verticales*.

Une ligne horizontale ou perpendiculaire au fil-à-plomb est une *ligne de niveau apparent*, parce qu'il semble en effet que tous les points de cette droite soient de niveau entre eux, quoique cela n'ait pas lieu.

Toute ligne courbe tracée sur la surface de la terre supposée sphérique, est dite une *ligne de niveau vrai* : tel est, par exemple [fig. 11], l'arc terrestre AD.

Si au point A l'on conçoit une tangente à l'arc AD, la partie BD de la sécante BC sera la différence de niveau des deux points A, B, ou la hauteur du niveau apparent AB au-dessus du niveau vrai AD. Ainsi les eaux d'un canal dont le fond serait horizontal et représenté par AB, couleraient de B vers A, jusqu'à ce qu'elles fussent de niveau autour de ce dernier point.

Il est important, dans la pratique du nivellement, d'évaluer la hauteur BD, lorsque l'on connaît la longueur de la tangente AB : or, c'est à quoi l'on parvient aisément en considérant que toute tangente AB est moyenne proportionnelle entre la sécante entière BH et sa partie extérieure BD. On a donc

$$BH : AB :: AB : BD = \frac{\overline{AB}^2}{BH} = \frac{\overline{AB}^2}{2CD + BD};$$

d'où

$$\overline{BD}^2 + 2CD \times BD = \overline{AB}^2.$$

Pour calculer rigoureusement BD, il faudrait résoudre une équation du second degré; mais cette hauteur est toujours si petite à l'égard du diamètre 2CD de la terre, que

la formule précédente peut, sans erreur sensible, être réduite à

$$BD = \frac{\overline{AB}^2}{2CD}, \quad \text{ou, pour abréger,} \quad h = \frac{a^2}{2R}.$$

De même, pour une autre distance $AB' = a'$, on aurait $B'D'$, ou

$$h' = \frac{a'^2}{2R}.$$

Les hauteurs du niveau apparent au-dessus du niveau vrai, sont donc entre elles à très peu près comme les carrés des tangentes correspondantes, ou même des arcs auxquels ces tangentes appartiennent.

Sachant que le rayon $CD = R = 6366198^m$, ou que le logarithme de $2R = 7{,}1049101$, et connaissant la distance $AB = a$, il est facile de calculer la hauteur h dont il s'agit. Cherchons, pour appliquer les principes ci-dessus, les hauteurs du niveau apparent au-dessus du niveau réel pour les distances 450 et 1000^m.

La hauteur correspondante à 450^m sera donnée par la formule $h = \frac{a^2}{2R} = \frac{(450)^2}{2R}$, et l'on trouvera, en opérant à l'aide des logarithmes, que $h = 0^m{,}016$.

On aura ensuite la hauteur h' correspondante à la distance $a' = 1000^m$, par le moyen de cette proportion

$$a^2 : a'^2 :: h : h',$$

ou en valeurs numériques,

$$(450)^2 : (1000)^2 :: 0^m{,}016 : h'.$$

Ainsi $h' = 0^m{,}0785$. Si l'on devait effectuer d'autres calculs de cette espèce, il serait plus simple de comparer à cette dernière hauteur toutes celles que l'on aurait à déterminer; parce que la division s'effectuerait sur-le-champ, en déplaçant convenablement la virgule décimale, comme cela est évident.

24. La triangulation d'une carte topographique faite ainsi qu'il a été expliqué dans les chapitres précédens, fournit tous les élémens nécessaires pour calculer les différences de niveau des stations. Voici comment :

[Fig. 12.] Soient A et B deux des stations où l'on a observé les distances réciproques au zénit, c'est-à-dire, les angles $ZAB = \delta$, $VBA = \delta'$, formés par les verticales CZ, CV, et par la droite AB. Si, par le point A, on mène une corde AD parallèle à la corde terrestre ad, les points A, D seront de niveau entre eux, et BD sera la hauteur du point B au-dessus du point A. La résolution des triangles a fait connaître l'arc AD, lequel, vu sa petitesse, peut être pris pour sa corde. Ainsi, dans le triangle ABD, où nous ferons, angle $BAD = u$, angle $BDA = u'$, et corde $AD = K$, on a, à cause de $ZAD = VDA$,

$$\delta + u = \delta' - u = u'; \quad \text{d'où} \quad u = \frac{\delta' - \delta}{2}.$$

De plus, ce même triangle donnant

$$\sin \delta' : K :: \sin u : BD,$$

on a BD, ou

$$dE = \frac{K \sin u}{\sin \delta'} = \frac{K \sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\sin \delta'};$$

mais il est évident que

$$\delta' = \frac{\delta' - \delta}{2} + \frac{\delta' + \delta}{2};$$

et qu'en désignant par 1^Q le quadrant, le triangle rectiligne ABC fournit cette relation

$$\frac{\delta' + \delta}{2} = 1^Q + \frac{C}{2};$$

partant,

$$\delta' = \frac{\delta' - \delta}{2} + 1^Q + \frac{C}{2},$$

et

$$\sin \delta' = \cos\left(\frac{\delta' - \delta}{2} + \frac{C}{2}\right).$$

Substituant cette dernière valeur dans celle de BD, il vient enfin

$$(1) \qquad dE = \frac{K \sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)}.$$

Cette formule est exacte et très commode à évaluer par les logarithmes; mais la plupart du temps, et dans toutes les triangulations du second ordre, telles que celles qui sont l'objet de cette section, l'on peut faire $\frac{1}{2}C = 0$; alors à cause de $\frac{\sin m}{\cos m} = \operatorname{tang} m$, on a simplement

$$(2) \qquad dE = K \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta).$$

Lorsque $\delta' > \delta$, dE est positif; c'est le contraire si $\delta' < \delta$; δ étant la distance au zénit observée au lieu dont on connaît l'élévation au-dessus d'un niveau fixe, comme celui d'un lac ou de la mer, et δ' étant la distance au zénit prise au lieu dont on cherche l'élévation.

Les trois angles ZAB, BAD, DAC, valant deux droits, on a nécessairement, à cause de $DAC = 1^Q - \frac{C}{2}$,

$$u = 2^Q - \delta - 1^Q + \frac{C}{2} = 1^Q - \delta + \frac{C}{2}.$$

D'ailleurs

$$u' = \delta + u = 1^Q + \frac{C}{2};$$

de là

$$u + u' = 2^Q - \delta + C;$$

et comme le triangle ADB donne

$$\sin \delta' \quad \text{ou} \quad \sin(2^Q - \delta + C) : K :: \sin u : dE,$$

on a, par une seule distance zénitale,

$$(3) \qquad dE = \frac{K \sin\left(19 - \delta + \frac{C}{2}\right)}{\sin(\delta - C)} = \frac{K \cos(\delta - \frac{1}{2}C}{\sin(\delta - C)}.$$

Si l'on développe le dénominateur de cette valeur, après y avoir substitué $\delta - \frac{C}{2} - \frac{C}{2}$, au lieu de $\delta - C$, on aura

$$dE = \frac{K \cos(\delta - \frac{1}{2}C)}{\sin(\delta - \frac{1}{2}C)\cos\frac{1}{2}C - \cos(\delta - \frac{1}{2}C)\sin\frac{1}{2}C};$$

expression qui prend cette forme

$$dE = \frac{K \cos(\delta - \frac{1}{2}C)}{\sin(\delta - \frac{1}{2}C)\cos\frac{1}{2}C\left[1 - \cot(\delta - \frac{1}{2}C)\tang\frac{1}{2}C\right]},$$

et qu'on pourrait réduire en série en faisant passer au numérateur le facteur binome $\left[1 - \cot(\delta - \frac{1}{2}C)\tang\frac{1}{2}C\right]$, élevé à la puissance -1; mais, dans la pratique, le premier terme de cette série étant toujours suffisant, l'on a simplement alors

$$(4) \qquad dE = K \sec\tfrac{1}{2}C \cot(\delta - \tfrac{1}{2}C).$$

25. Il convient de faire remarquer que les formules précédentes supposent que les points A, B [Fig. 13] sont les sommets des signaux; mais il est presque toujours impossible d'y placer le centre de l'instrument. Par exemple, quand on observe le point B, ce centre est souvent en a, c'est-à-dire, plus bas; et quand on observe en B, ce même centre se trouve en b: les distances au zénit mesurées sont donc $ZaB = \Delta$, $VbA = \Delta'$, au lieu de ZAB, VBA. Dans ce cas, on réduit au sommet ou au pied des signaux ces distances au zénit, au moyen de la formule suivante qu'il est aisé de démontrer:

$$d\Delta = R'' \frac{dH \sin \Delta}{K},$$

Δ étant l'angle observé réellement, dH désignant la hau-

teur du signal au-dessus du cercle, ou la distance verticale de cet instrument au pied du signal, et R″ étant le nombre de secondes contenues dans le rayon. La valeur de $d\Delta$ est additive ou soustractive, selon que l'on réduit Δ au sommet ou au pied du signal; c'est-à-dire que l'on a

$$\text{au sommet du signal} \quad \delta = \Delta + d\Delta,$$
$$\text{au pied du signal} \quad \delta = \Delta - d\Delta.$$

Voici le type de ce calcul:

Soient $\Delta = 100^{gr},2408$, $\Delta' = 99^{gr},9259$,
Aa ou $d\text{H} = 17^{m}$, Bb ou $d\text{H}' = 15^{m},1$.

On aura d'abord, en vertu de la formule ci-dessus, et en sachant d'ailleurs, par la triangulation, que..... $\log K = 4,1606823$,

$$\begin{array}{rlrl}
\log d\text{H} = & 1,23045 & \log d\text{H}' = & 1,17898 \\
\text{l. sin}\,\Delta = & 9,99999 & \text{l. sin}\,\Delta' = & 9,99999 \\
\text{c. log}\,K = & 5,83931 & \text{c. log}\,K = & 5,83931 \\
\log R'' = & \underline{5,80388} & \log.\,R'' = & \underline{5,80388} \\
\log d\Delta = & 2,87363 & \log d\Delta' = & 2,82216 \\
= & +\,747'',5 & = & +\,663'',9.
\end{array}$$

Ensuite, pour la réduction,

$$\begin{array}{rlrl}
 & \text{au sommet A,} & & \text{au sommet B,} \\
\Delta = & 100^{gr},24'08'' & \Delta' = & 99^{gr},92'59'' \\
+d\Delta = & \underline{0,\ 747\ 5} & +d\Delta' = & \underline{0,\ 663\ 9} \\
\text{Distance réduite, } \delta = & 100^{gr},31'55''5 & \delta' = & 99^{gr},99'22''9.
\end{array}$$

Maintenant que l'on connaît δ et δ', on aura, par la formule (2), la différence de niveau des points A, B.

$$\begin{array}{rl}
\log K = & 4,1606823 \\
\log \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = & -\ \underline{7,4046430} \\
\log dE = & -\ 1,5653253 = -\ 36^{m},756.
\end{array}$$

Il suit de là que le point B est de $26^{m},76$ plus bas que le point A.

Lorsqu'il n'est pas possible de faire des observations ré-

ciproques, et que la distance K n'est pas considérable, il est permis de supposer que $\delta' = 2^{\circ} - \delta$; et pour lors la formule (2) se change en celle-ci :

$$(4') \qquad dE = K \cot \delta;$$

selon que δ sera aigu ou obtus, la hauteur dE sera positive ou négative.

Voilà des formules qui sont dépendantes de la ligne géodésique K ou d'une base horizontale. Il est possible cependant de déterminer géométriquement la différence de niveau de deux points, sans connaître cette ligne. En effet, la formule (2) devient seulement fonction des distances réciproques au zénit et du rayon de la terre; car, à cause de $K = 2\rho \sin \frac{1}{2} C$, ρ étant le rayon de la terre correspondant au milieu de la corde K, et C l'*amplitude* de l'arc soutendu par cette corde ou l'angle ACB, on a

$$dE = 2\rho \sin \tfrac{1}{2} C \tang \tfrac{1}{2} (\delta' - \delta);$$

mais par ce qui précède, $\frac{C}{2} = \frac{\delta + \delta'}{2} - 1^{\circ}$; donc

$$(5) \qquad dE = -2\rho \cos \tfrac{1}{2} (\delta + \delta') \tang \tfrac{1}{2} (\delta' - \delta).$$

Il faudra, pour déterminer le signe de dE, avoir égard à ceux des facteurs du second membre.

En procédant ainsi de signal en signal, on ne déterminerait que leurs *hauteurs relatives;* voici la règle à suivre pour obtenir leurs *hauteurs absolues*, c'est-à-dire les élévations de leurs sommets au-dessus d'un même horizon, de celui de la mer, par exemple.

Supposons que les points B, B′, B″... $B^{(n)}$, sommets des signaux, soient inégalement élevés au-dessus d'un horizon commun, de manière que h' soit l'élévation du point B′ au-dessus du niveau de B; h'' l'élévation du point B″ au-dessus du niveau de B′; d''' la dépression du point B‴ au-dessous de B″, et ainsi de suite. Il est évident alors que l'on aura également

$$H - D = \text{différence de niveau},$$

en prenant positivement les hauteurs h, dont la somme est H, et négativement les dépressions d dont la somme est D. Si cette formule a pour résultat le signe $+$, le point $B^{(n)}$ sera au-dessus du niveau de B; et si elle a le signe $-$, le point $B^{(n)}$ sera au-dessous du même niveau.

Concluons de là que si E est la hauteur du point B au-dessus de la surface de la mer supposée prolongée sur le continent, $E + H - D$ sera la hauteur de tout autre point au-dessus de ce niveau. Pour avoir ensuite les hauteurs absolues du sol, on retranchera la longueur de chaque signal de la hauteur absolue de son sommet. Toutes ces règles sont assez faciles pour qu'il soit inutile d'en rapporter des exemples.

26. Lorsque du sommet d'une montagne l'on aperçoit l'horizon de la mer, la hauteur absolue de ce point s'obtient aisément au moyen de l'angle observé entre cet horizon et le zénit. En effet, si par le lieu B de l'observateur [Fig. 11] on imagine une tangente BA à la surface de la mer, le rayon terrestre $AC = \rho$ sera évidemment perpendiculaire à cette tangente. Si l'on imagine en outre une ligne de niveau, ou un arc de grand cercle AD compris entre le point A de contact et la verticale VB de l'observateur, la hauteur cherchée sera $BD = E$; et comme dans le triangle rectangle ABC l'on connaîtra $AC = \rho$ et l'angle $B = 2^{\text{Q}} - VBA = 2^{\text{Q}} - \delta$, la hauteur E sera égale à l'hypoténuse CB moins le rayon de la terre.

Or, par la propriété de ce triangle,

$$CB = \frac{\rho}{\sin(1^{\text{Q}} - C)} = \frac{\rho}{\cos C};$$

et puisque $BD = E = CB - \rho$, on a (n° 2)

$$E = \rho\left(\frac{1 - \cos C}{\cos C}\right) = \rho\,\frac{2\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos C}.$$

Multipliant haut et bas par $\sin C$, puis faisant attention que $\frac{\sin C}{\cos C} = \operatorname{tang} C$, et que $\sin C = 2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C$, il vient

$$E = \frac{2\rho \sin^2 \frac{1}{2} C \sin C}{\sin C \cos C} = \rho \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C \operatorname{tang} C;$$

mais l'angle C est fonction de la distance zénitale δ observée, puisque l'angle extérieur $\delta = 1^{Q} + C$; partant

$$E = \rho \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\delta - 1^{Q}) \operatorname{tang} (\delta - 1^{Q}).$$

On remarquera enfin que l'angle δ différant très peu d'un angle droit, on a sensiblement

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\delta - 1^{Q}) = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} (\delta - 1^{Q});$$

ainsi, à très peu près,

$$(6) \qquad E = \tfrac{1}{2} \rho \operatorname{tang}^2 (\delta - 1^{Q})$$
$$= \tfrac{1}{2} \rho \operatorname{tang}^2 \textit{de l'angle de dépression.}$$

27. Dans toute la théorie précédente, nous avons supposé qu'un rayon lumineux qui partait d'un objet pour venir en peindre l'image dans notre œil, y arrivait en ligne droite : cependant, quand il traverse des milieux d'inégales densités, il éprouve une déviation principalement sensible dans le sens vertical; et ce n'est que suivant la tangente à la courbe qu'il décrit, que nous voyons l'objet. C'est cette déviation que l'on nomme *réfraction*. Son effet est de faire paraître presque toujours les objets plus élevés qu'ils ne le sont réellement; et il est d'autant plus grand que le rayon visuel s'écarte moins de la surface de la terre. (*Uranographie* de M. Francœur, p. 188.) De là vient que le point B observé du point A, et supposé éloigné de celui-ci de plus de 1000^{m}, parait réellement au-dessus de son lieu vrai. Comme nous ne pouvons donner ici qu'une idée des moyens propres à évaluer l'effet de la réfraction, puisque nous supposons que

les limites entre lesquelles se trouvent renfermées les opérations du nivellement sont très rapprochées, nous renverrons aux ouvrages déjà cités, si l'on désire acquérir plus de connaissances sur ce sujet. Nous observerons d'abord que les formules (1) et (2) du n° 19 ne changent pas dans l'hypothèse d'une réfraction. Cela tient à ce que cette réfraction étant la même en A qu'en B, sa valeur doit nécessairement disparaître de l'expression $\delta' - \delta$, ou, ce qui est de même, quand on fait des observations réciproques et simultanées.

En général, l'angle de réfraction est à très peu près $\frac{1}{14}$ de l'amplitude de l'arc terrestre compris entre les verticales des deux points A, B, dont on cherche la différence de niveau. On le détermine immédiatement en prenant au même moment la distance zénitale de B à la station A [fig. 12], et la distance zénitale de A à la station B; ce qui exige le concours de deux observateurs. Cependant, lorsqu'on est seul, on tâche de faire ces deux observations dans les mêmes circonstances atmosphériques. De l'une ou de l'autre manière, soient δ et δ' les distances zénitales *apparentes*; les distances vraies seront respectivement $\delta + r$, $\delta' + r$, puisque par hypothèse la réfraction r élève les objets, et est la même aux deux stations. Alors le triangle ABC procurant nécessairement cette relation

$$\delta + r + \delta' + r = 2^{\text{o}} + \text{C},$$

on a

$$r = 1^{\text{o}} + \frac{\text{C}}{2} - \left(\frac{\delta + \delta'}{2}\right).$$

Mais la grandeur de l'angle C dépend de la distance AB' = K donnée par la résolution des triangles; et il est visible que l'on a

$$\rho \sin \tfrac{1}{2}\text{C} = \tfrac{1}{2}\text{K},$$

ou à fort peu près

$$\sin C = \frac{K}{\rho}.$$

Soit maintenant $\frac{r}{C} = n$, ou aura

$$r = nC.$$

Dans l'état moyen de l'atmosphère, ce coefficient de la réfraction terrestre $n = 0{,}08$, comme nous l'avons déjà dit. En l'introduisant dans les formules (4) et (6), elles deviennent respectivement, lorsqu'on suppose $\sec \frac{1}{2} C = 1$,

$$(4'') \quad dE = K \cot (\delta + r - \tfrac{1}{2}C) = K \cot \left(\delta + \frac{2n-1}{2} C\right),$$

$$(6') \quad E = \tfrac{1}{2} \rho (1 + n)^2 \tang^2 (\delta - 1^{\circ}),$$

δ étant la distance apparente observée. (Voyez le *Traité de Géodésie*, t. I, p. 355 et 356.) Telles sont les formules à employer dans les opérations géodésiques importantes.

La formule (4''), qui est d'un fréquent usage, même en Topographie, peut être mise sous une autre forme très simple, ainsi qu'il suit :

Si l'on mène au point A l'horizontale AD′ [fig. 12), et que l'on considère le triangle ABD′ comme rectangle en D′, la hauteur cherchée dE se composera de BD′ et de DD′. Or, dans l'hypothèse présente, BD′ $= K \cot \delta$, et d'après ce qui précède (n° 23) DD′ $= \frac{K^2}{2\rho}$; ainsi, à très peu près,

$$dE = K \cot \delta + \frac{K^2}{2\rho}.$$

Mais la réfraction élevant les objets, cette valeur de dE qui dépend de la distance zénitale δ, est nécessairement trop grande d'une petite quantité μ qu'il s'agit de trouver. Pour cet effet, remarquons que $r = nC = n \frac{K}{\rho}$, désignant en général la réfraction à l'unité de distance, on a, pour la distance K,

$$\mu = n\mathrm{CK} = n\frac{\mathrm{K}^2}{\rho}.$$

Partant

$$(4''') \qquad d\mathrm{E} = \mathrm{K}\cot\delta + \frac{\mathrm{K}^2}{2\rho} - \frac{n\mathrm{K}^2}{\rho}.$$

Il arrive quelquefois, cependant, que la densité de l'air atmosphérique, au voisinage du sol, augmente de plus en plus en allant de bas en haut, ce qui est le cas des réfractions extraordinaires ; alors le coefficient n de positif qu'il est ordinairement, devient négatif. Les observations réciproques et simultanées, dont nous avons parlé ci-dessus, sont propres à faire connaître le signe dont ce coefficient doit être affecté.

C'est au moyen de la formule (4'''), facile à mettre en table, que les ingénieurs géographes déterminent, en levant les détails topographiques, une multitude de cotes de hauteur servant à faire connaître de distance en distance, et dans toutes les directions possibles, les points du sol par lesquels passent les courbes de niveau servant à figurer les mouvemens du terrain, comme on le verra dans le chapitre suivant. On conçoit en effet que si l'on aperçoit le sommet d'un signal dont on a la hauteur au-dessus du niveau de la mer, on obtiendra celle du lieu où l'on se trouve, en observant simplement la distance zénitale de ce sommet, et mesurant graphiquement, sur la carte, la distance du lieu d'observation au signal dont il s'agit.

Il résulte de ce qui précède, que le nivellement d'un terrain d'une grande étendue s'exécute avec beaucoup de précision par le moyen du cercle répétiteur ; mais cette méthode suppose que les points extrêmes de ce nivellement sont liés par un réseau de triangles, et qu'un des côtés de ce réseau, pris pour base, a été mesuré avec un soin tout particulier. Dans la plupart des travaux civils et militaires, où l'on se propose bien moins de connaître les distances itinéraires que les différences de niveau, ou les *cotes de*

hauteur, on a recours à des moyens beaucoup plus simples et plus prompts. En effet, à l'aide d'un instrument ou *Niveau*, qui, comme le *Niveau d'eau* ou le *Niveau à bulle d'air* de Chézy, procure sur-le-champ une ligne horizontale, il est facile de rapporter à cette ligne les élévations ou les dépressions des objets. C'est ce que nous avons amplement développé dans notre *Traité de Topographie*, 2e édition. On verra aussi, à la fin du t. II du *Traité de Géodésie*, comment on peut déterminer les différences de niveau avec le baromètre. Consultez d'ailleurs sur ce point l'*Astronom. élém.*, par Biot, p. 136, ou la *Mécanique* de Francœur, 3e édit., pag 447, ou enfin l'*Annuaire* du Bureau des Longitudes.

CHAPITRE VI.

Opérations de détail, et figuré géométrique du terrain.

28. Après avoir formé le canevas d'un plan, il reste à en faire le *remplissage*, c'est-à-dire, à figurer tous les objets qui doivent couvrir sa surface, comme les masses de maisons, les rivières, les ruisseaux, les chemins, les limites des différentes cultures, en un mot, toutes les propriétés particulières, ainsi que les divers mouvemens du terrain. On conçoit d'après cela qu'il faut, pour parvenir complètement à ce but, réunir aux connaissances de Géométrie pratique celles du Dessin topographique. Cet art, qui tient et du dessin d'imitation et de celui de convention, ne peut être présenté dans tous ses détails que dans un traité *ex professo*. Nous parlerons donc seulement de ce qui a rapport au figuré géométrique des lignes que l'on considère à la surface de la terre, à l'aide des deux instrumens dont nous avons donné précédemment la description; et nous renverrons, pour ce qui concerne l'usage de la planchette, de la boussole, etc., au 3e livre du *Traité de Topographie*, 2e édition.

En général, il y a deux méthodes de lever les détails. La première est de tracer autour de l'espace à figurer un polygone quelconque du plus petit nombre possible de côtés; ou si cet espace est considérable, de le diviser en polygones partiels, d'en mesurer exactement les angles et les côtés, puis d'abaisser de petites perpendiculaires de

toutes les sinuosités du terrain sur ces côtés pris pour bases, ainsi qu'on le voit [fig. 14]; et enfin, après avoir pris toutes les mesures nécessaires, de dessiner tous les objets renfermés dans ces polygones. Dans l'application de cette méthode, il importe d'éviter les angles trop aigus ou trop obtus, parce que la position d'un point donnée par l'intersection de deux lignes est d'autant plus exacte que ces lignes se coupent moins obliquement.

La seconde méthode qui facilite singulièrement l'évaluation des surfaces agraires, est, lorsque le terrain s'y prête, d'abaisser des perpendiculaires de tous les angles du périmètre des masses à lever, sur des lignes directrices ou bases que l'on rattache aux côtés des triangles du canevas. C'est ce que l'on voit à la seule inspection des fig. 14 et 15, dans lesquelles toutes les lignes ponctuées sont des lignes d'opérations. Cette dernière méthode est même fort en usage parmi les arpenteurs, soit qu'ils lèvent isolément un champ, soit qu'ils détaillent les masses d'un cadastre, parce qu'elle dispense de tout calcul trigonométrique. J'observerai cependant qu'elle est loin d'être préférable à la première méthode, surtout lorsqu'il s'agit de figurer un pays de montagnes ou un pays extrêmement couvert et accidenté.

On conçoit bien que, pour des opérations de détail un peu compliquées, de simples croquis dessinés à vue, seraient peu propres à diriger dans le mis-au-net; aussi convient-il, ainsi que nous l'avons dit au n° 22, de diviser le canevas du plan en plusieurs rectangles partiels, et de les rapporter à l'échelle des détails, afin de pouvoir figurer exactement au crayon, sur les lieux mêmes, tous les objets au fur et à mesure que l'on opère. Mais il est essentiel d'arrêter le soir son dessin, à l'encre de la Chine, et d'écrire bien nettement toutes les mesures qui ont été prises.

Les ingénieurs géographes et ceux des ponts et chaussées, qui figurent le terrain à l'aide de la planchette ou de la boussole, se contentent souvent de retrouver les mesures

sur le plan même, au moyen de son échelle et du rapporteur; mais pour des opérations relatives à un cadastre, il y aurait de l'inconvénient à procéder de la sorte, surtout si les détails étaient rapportés à une petite échelle, et s'ils n'étaient pas représentés avec un soin extrême. Nous avons été plus d'une fois à portée de reconnaître des différences notables entre les évaluations des surfaces déduites de mesures graphiques, et celles qui dérivaient de mesures prises sur le terrain.

Une autre source d'erreurs est que certaines personnes mesurent les lignes dans le sens même de leurs pentes, et ne les réduisent point ensuite à l'horizon. Cependant il est de règle, en Topographie, que toutes les surfaces doivent être projetées sur un plan horizontal par des perpendiculaires à ce plan; et cela est absolument nécessaire pour parvenir à raccorder tous les détails entre eux, et à les enchâsser dans le canevas trigonométrique. Dans les transactions sociales, d'ailleurs, l'on a été porté à choisir cette *méthode de cultellation* de préférence à la *méthode de développement*, parce qu'il est reconnu que le produit de la culture n'est pas toujours proportionnel à sa surface. En effet, un champ placé sur un coteau ne produit pas autant qu'un champ de même superficie et de même qualité situé en plaine. Ainsi, quand des cohéritiers ont un droit égal dans le partage des terres, il faut, au lieu de diviser ces terres en parties égales, les partager en parties qui soient entre elles en raison inverse de leurs produits.

Les deux méthodes dont il vient d'être question, sont principalement relatives à la détermination des lignes qui servent de limites aux différentes cultures, aux chemins, aux cours d'eau, aux habitations, etc.; mais il importe qu'une carte topographique donne, pour être complète, la configuration du terrain et même des montagnes les plus abruptes. Dans les lieux accessibles, on parvient à lui procurer cet avantage par des nivellemens coordonnés entre eux, et servant

à faire connaître les diverses courbes qui seraient formées à la surface de la terre, par sa rencontre avec une série de plans horizontaux équidistans dans le sens vertical; car ces courbes horizontales projetées orthogonalement sur la carte, se rapprochent ou s'éloignent d'autant plus les unes des autres, que les pentes ou les inclinaisons du sol sont plus ou moins fortes.

Les ingénieurs-géographes, au lieu de tracer définitivement ces courbes sur leurs minutes, comme le font les officiers du génie pour les plans spéciaux à grande échelle, les indiquent seulement au crayon, après en avoir déterminé un grand nombre de points par la méthode du n° 27; mais ils dessinent à la plume, et très près les unes des autres, des normales entre deux courbes consécutives. Ces normales ou *hachures* sont précisément les projections des lignes de plus grande pente. Leur longueur est donc égale à la cotangente de l'angle d'inclinaison de la ligne correspondante sur la surface de la terre, lorsqu'on prend pour unité la plus courte distance de deux plans de section consécutifs. Elles servent aussi à faire apprécier les différentes inclinaisons des pentes lorsqu'elles forment solution de continuité aux points où elles rencontrent les courbes de niveau équidistantes dont il s'agit. Elles produisent un bel effet quand elles ne sont ni trop longues ni trop fines, et qu'elles engrènent les unes dans les autres sans laisser d'intervalle entre elles, dans le sens de la pente du terrain. En général, on les serre et on les renforce d'autant plus, qu'elles appartiennent à des pentes plus rapides; mais il n'est pas nécessaire d'établir à cet égard une loi géométrique d'espacement et de renforcement, comme quelques personnes l'avaient proposé il y a peu d'années; d'abord, parce qu'il serait impossible de s'y astreindre dans la pratique, eût-on même tout le temps et toute la patience nécessaires pour cela, et ensuite, parce que l'exactitude du figuré du terrain doit essentiellement se trouver dans la direction et la lon-

gueur des hachures, ou dans la disposition des courbes de niveau.

Les pays de hautes montagnes se refusant souvent à l'application des méthodes géométriques d'après lesquelles on parvient à connaître exactement la charpente d'un terrain accessible et faiblement ondulé, c'est alors que l'ingénieur doit profiter de toutes les ressources que lui offrent les arts d'imitation. En général, le relief des montagnes n'est jamais mieux caractérisé sur les grandes cartes topographiques à petite échelle ou à *petit point*, qu'en imitant par des teintes les effets de lumière et d'ombre qui auraient lieu dans la nature, si le sol était éclairé obliquement par un faisceau de rayons parallèles; mais il faut avoir le soin de ne pas donner sur les minutes trop d'intensité à ces teintes, afin de laisser paraître les hachures, ainsi que tous les détails sur lesquels elles sont appliquées (*). C'est surtout en France que l'art d'exprimer en Topographie les plus grands accidens du terrain, a été porté au plus haut degré de perfection : puisse-t-il ne jamais dégénérer parmi nous !

(*) Voyez le *Traité de Topographie*, 2e édit., pag. 226 et 233.

CHAPITRE VII.

Évaluation des surfaces agraires.

29. Après avoir formé les détails d'un plan par l'une des méthodes exposées dans le chapitre précédent, on procède aux calculs des superficies des diverses propriétés de chaque particulier; et ensuite pour contrôler ces calculs, on évalue en masse l'étendue superficielle de tout le plan; opération qu'il est aisé d'effectuer, puisque, par le mode de construction du canevas trigonométrique indiqué au n° 22, il ne s'agit que de calculer les aires des triangles et des trapèzes rectangles dont le canevas est composé. Quoique de telles opérations numériques n'offrent rien de difficile, et soient fondées sur les principes d'une Géométrie élémentaire, nous allons en fournir des exemples en faveur des jeunes gens qui débutent dans la carrière topographique.

PROBLÈMES FONDAMENTAUX.

Prob. I. *Mesurer l'aire d'un rectangle et d'un parallélogramme.*

[Fig. 16.] Soient $AB = A'B' = 59^m,8$ les bases; et $AC = C'H' = 37^m,05$ les hauteurs du rectangle ABCD et du parallélogramme A'B'C'D'. L'aire S de chacune de ces deux figures étant égale au produit de ces deux dimensions, il est clair que l'on a pour le rectangle comme pour le parallélogramme,

$$S = 59^m,8 \times 37^m,05 = 2215^{mc},59 = 22^{ares},15^{mc},59.$$

PROB. II. *Mesurer l'aire d'un triangle rectiligne.*

Connaissant la base et la hauteur.

[Fig. 17.] Soient $AB = 9^m,6$ la base; et $CD = 5^m$ la hauteur du triangle rectiligne ACB. L'aire d'un triangle quelconque étant égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur, on a

$$S = \frac{9^m,6 \times 5}{2} = 24^{mc}.$$

Il n'est aucune étendue superficielle qu'on ne puisse décomposer en triangles; ainsi, en évaluant graphiquement sur un plan à grande échelle les bases et les hauteurs de ces triangles, on aura très facilement, par ce petit calcul, l'aire de l'espace à mesurer.

Connaissant les trois côtés.

Il arrive souvent qu'il est impossible de pénétrer dans l'intérieur d'un triangle, et de parcourir même l'espace qui l'environne; alors on mesure les trois côtés de cette figure et l'on fait usage de la formule suivante :

$$S = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)},$$

dans laquelle S désigne l'aire du triangle; a, b, c, ses trois côtés; et p son périmètre $= a + b + c$ (n° 3).

Soient $a = 25^m$, $b = 20^m$, $c = 15^m$, on trouvera que

$$S = \sqrt{30\,(30 - 25)\,(30 - 20)\,(30 - 15)} = 150.$$

On pourrait en général effectuer ce calcul à l'aide des tables de logarithmes; mais dans ce cas particulier, on détermine plus simplement l'aire cherchée, puisque le triangle ABC est rectangle. En effet, le carré du plus grand côté a étant égal à la somme des carrés des deux autres côtés b, c,

on a

$$S = \frac{bc}{2} = \frac{20 \times 15}{2} = 150.$$

Ce problème est un des plus utiles de la Géométrie pratique; on peut, à son moyen, évaluer l'aire de quelque polygone que ce soit, sans employer d'autre instrument qu'une chaîne métrique; puisqu'en mesurant les trois côtés de chaque triangle en lesquels ce polygone sera décomposé, la formule précédente recevra immédiatement son application; mais cette méthode est beaucoup plus longue que celle que nous exposerons bientôt.

Connaissant deux côtés et l'angle compris.

Si dans un triangle dont A, B, C sont les angles, et a, b, c, les côtés respectivement opposés, on connaît les deux côtés b, c, et l'angle A compris, et que l'on nomme h la perpendiculaire CD, on aura, à cause du triangle rectangle ACD,

$$h = b \sin A,$$

en supposant le rayon des tables $= 1$; mais l'aire.....

$$ACB = \frac{AB \times CD}{2} = s; \text{ donc}$$

$$s = \frac{bc}{2} \sin A;$$

c'est-à-dire que l'*aire d'un triangle est égale à la moitié du produit des deux côtés connus, multiplié par le sinus de l'angle compris.*

Soient $b = 25^m,4$; $c = 30^m,2$; $A = 42^{gr},15'$; on aura

$$\begin{aligned} \log b &= 1,4048337 \\ \log. \tfrac{1}{2} c &= 1,1789769 \\ \log \sin A &= 9,7887106 \\ \hline \log s &= 2,3725212; \end{aligned}$$

ainsi l'aire du triangle, ou $s = 235^{mc},79$.

Connaissant un côté et les deux angles adjacens.

Dans le triangle ABC, on a, comme on sait,

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin B}{\sin (A + B)} = \frac{b}{c};$$

de là tirant la valeur de b et la substituant dans la formule $s = \frac{bc}{2} \sin A$, obtenue ci-dessus, on trouve

$$s = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin (A + B)};$$

expression qu'il est facile de calculer de même par les logarithmes.

Connaissant deux côtés et les deux angles opposés.

Soient ab et AB les quantités connues; on a, n° 3,

$$s = \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right) \frac{\sin A \sin B}{\sin (A - B)}.$$

Autrement de ce que $a : b :: \sin A : \sin B$, on a

$$a - b : a :: \sin A - \sin B : \sin A;$$

d'où

$$a - b = \frac{a (\sin A - \sin B)}{\sin A} = \frac{2a \sin \frac{1}{2}(A - B) \cos \frac{1}{2}(A + B)}{\sin A};$$

substituant cette valeur dans celle de s précédente et réduisant, il vient

$$s = \frac{a (a + b)}{2} \cdot \frac{\sin B \cos \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} (A - B)}.$$

Lorsque $a = b$, on a $A = B$, et $\cos \frac{1}{2} (A - B) = 1$; dans ce cas,

$$s = a^2 \sin A \cos A = \tfrac{1}{2} a^2 \sin 2A,$$

ainsi qu'il est aisé de le démontrer directement.

PROB. III. *Trouver l'aire d'un quadrilatère dont on connaît les deux diagonales et l'angle qu'elles forment.*

En vertu de l'une des solutions précédentes, on a [Fig. 18],

$$\text{aire BEC} = \frac{yz}{2} \sin E,$$

$$\text{ABE} = \frac{xz}{2} \sin E,$$

$$\text{AED} = \frac{xt}{2} \sin E,$$

$$\text{DEC} = \frac{yt}{2} \sin E;$$

donc

$$\text{ABCD} = \frac{xz + xt + yz + yt}{2} \sin E = \frac{(x+y)(z+t)}{2} \sin E.$$

Il suit de là que l'*aire d'un quadrilatère est égale à la moitié du produit de ses deux diagonales, multiplié par les sinus de l'angle compris.*

Quoique dans l'arpentage, on ait rarement besoin d'évaluer l'aire des figures régulières, je vais donner quelques exemples de calculs à ce sujet.

PROB. IV. *Mesurer l'aire d'un polygone régulier.*

[Fig. 19.] Si on connaît le côté K d'un polygone régulier et le nombre n de ses côtés, son aire s s'obtiendra à l'aide de la formule

$$s = \tfrac{1}{4} n K^2 \cot \frac{2q}{n},$$

q désignant le quadrant. L'angle au centre C du polygone étant $= \frac{4q}{n}$, sa moitié $= \frac{2q}{n}$; et comme le triangle ACD est rectangle en D, on a

$$CD = \frac{K}{2} \cot \frac{2q}{n}.$$

Or, l'aire de tout polygone régulier est égale au produit de son périmètre nK par la moitié de son apothème CD; donc, etc.

Pour appliquer la formule actuelle à un exemple, soient $K = 12^m$, et $n = 8$, on aura

$$\log K = 1{,}0791812,$$
$$\textit{idem} = 1{,}0791812,$$
$$\log \frac{n}{4} = 0{,}3010300,$$
$$\log \cot \frac{200^{gr}}{8} = 0{,}3827757,$$
$$\log s = \overline{2{,}8421681};$$

l'aire cherchée est donc égale à $s = 695^{mc},29$.

PROB. V. *Trouver l'aire d'un cercle dont on connaît le rayon.*

L'aire d'un cercle est égale au carré de son rayon, multiplié par le rapport de la circonférence au diamètre, c'est-à-dire, par $\pi = 3{,}14159265$: ainsi, appelant r le rayon d'un cercle, et s son aire, on a

$$s = \pi r^2.$$

L'approximation sera presque toujours suffisante, en supposant seulement $\pi = 3{,}14$.

Soit, pour exemple, $r = 16^m$, on aura

$$s = 3{,}14 \times \overline{16}^2 = 803^{mc},84;$$

Si on voulait opérer par les logarithmes, au double du logarithme du rayon, on ajouterait celui de π, lequel $= 0{,}4971479$, et la somme serait le logarithme de l'aire demandée.

Il est évident que l'on peut aussi déterminer le rayon d'un cercle dont l'aire est connue.

PROB. VI. *Déterminer l'aire d'un secteur dont l'arc est de* n *grades, et dont le rayon* = r.

Puisque l'aire s du secteur est à celle du cercle comme l'arc du secteur est à la circonférence entière, et que deux arcs d'un même cercle sont entre eux comme les nombres de grades qu'ils comprennent, on a

$$s : \pi r^2 :: n : 400, \quad \text{d'où} \quad s = n\frac{\pi r^2}{400};$$

par conséquent

$$\log \text{surf. du secteur} = \log n + 2\log r + 7{,}89508988.$$

PROB. VII. [Fig. 19.] *Trouver l'aire du segment dont l'arc comprend* n *grades, et dont le rayon* = r.

L'aire du segment AnB est égale à celle du secteur ACBnA, moins l'aire du triangle ABC. Or, par ce qui précède,

$$\text{aire du secteur} = n\frac{\pi r^2}{400},$$

$$\text{et celle du triangle ACB} = \frac{r^2}{2}\sin n;$$

donc

$$\log \text{aire du segment} = 2\log r + \log \tfrac{1}{2}\left(n\frac{\pi}{200} - \sin n\right).$$

Si l'on fait $a = n\frac{\pi}{200}$, on aura

$$\log a = \log n + 8{,}19611987 7.$$

Partant,

$$\log \text{aire du segment} = 2\log r + \log \tfrac{1}{2}(a \mp \sin n),$$

le signe $-$ ayant lieu lorsque $n < 200$, et le signe $+$ lorsque $n > 200$.

PROB. VIII. *Déterminer l'aire d'une ellipse dont on connaît les deux axes.*

Il est démontré, dans tous les traités de calcul intégral, que l'aire d'une ellipse est équivalente à celle d'un cercle dont le rayon serait moyen proportionnel entre les deux demi-axes. Cela posé, soient a et b ces deux demi-axes, et s l'aire cherchée, on aura

$$s = \pi ab.$$

Supposons que $a = 12$, et que $b = 10$, on trouvera

$$s = 3{,}14 \times 12 \times 10 = 3{,}14 \times 120 = 376^{m\,c},8.$$

De la mesure des polygones irréguliers.

30. [Fig. 20] *Déterminer l'aire du polygone irrégulier* ABCD..... *levé suivant la méthode du n° 28.*

Ce polygone étant, par suite des opérations faites sur le terrain, décomposé en triangles et en trapèzes rectangles, on aura sa superficie ainsi qu'il suit :

Aire du triangle (a)	$= (11{,}6)(4{,}2)\ldots =$	$48^{m\,c},72$
du triangle (b)	$= (21{,}45)(6{,}5)\ldots$	139 , 42
du trapèze (c)	$= (21)(7{,}5)\ldots$	157 , 50
du trapèze (d)	$= (13{,}7) \times 7\ldots$	95 , 90
du triangle (e)	$= (19{,}4)(3{,}2)\ldots$	62 , 08
du triangle (f)	$= 5 \times 5\ldots$	25 , 00
du trapèze (g)	$= (13{,}3)(26{,}85)\ldots$	357 , 10
du trapèze (h)	$= (11{,}1)(11{,}4)\ldots$	126 , 54
du trapèze (k)	$= 9 \times 5,\ldots$	45 , 00
	Somme.....	$1057^{m\,c},26$
Triangle (l) soustractif	$= 3 \times 2\ldots$	6
	Aire effective du polygone..	$1051^{m\,c},26$

Ainsi l'aire du polygone est de 10 ares 51 mètres carrés $\frac{26}{100}$.

Si le terrain à mesurer était terminé par une ligne courbe, on abaisserait sur la base AX menée intérieurement, autant de perpendiculaires qu'il serait nécessaire pour pouvoir considérer, sans erreur sensible, le périmètre du terrain comme un assemblage de petites lignes droites, et le calcul de la superficie se simplifierait beaucoup en rendant toutes ces perpendiculaires équidistantes; car il est aisé de démontrer que, dans ce cas, *l'aire cherchée est égale au produit de la distance commune de ces perpendiculaires, par la somme faite de la demi-somme des perpendiculaires extrêmes, et de la somme des perpendiculaires intermédiaires.* On entend par *perpendiculaires extrêmes*, celles qui passent par les extrémités de la base, et qui font partie de la limite de la figure; ainsi quand cette figure se termine en pointe aux extrémités de la base, il suffit, pour avoir la mesure de sa surface, de multiplier la somme des perpendiculaires intérieures par leur distance commune.

Déterminer l'aire d'un polygone rectiligne quelconque mesuré au graphomètre ou au cercle répétiteur.

[Fig 21.] Soit le polygone ABCDE, dont il s'agit d'évaluer la superficie : on mesurera tous les angles intérieurs et tous les côtés de ce polygone, et la vérification des angles devra se faire sur le terrain même, afin que si l'on découvre une erreur, on puisse la rectifier sur-le-champ. Cette vérification s'effectue à l'aide de ce principe connu, savoir : que la somme des angles intérieurs d'un polygone est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux.

Dans l'exemple actuel, on a, par l'observation,

$$\begin{aligned} \text{angle } A &= 120^{gr.} \\ B &= 132 \\ C &= 86{,}10 \\ D &= 118{,}15 \\ E &= 143{,}75 \\ \hline \text{Somme} &= 600^{gr.} \end{aligned}$$

laquelle est égale à celle des angles du pentagone ABCDE, puisque $200^{gr.} \times (5 - 2) = 600^{gr.}$.

Dans le cas où l'on aurait une faible erreur en plus ou en moins, et cela est très ordinaire, on diminuerait ou l'on augmenterait chaque angle de cette erreur divisée par le nombre des côtés du polygone. On suppose ici, toutefois, que les angles sont tous observés dans le même plan et aux sommets des angles du polygone; ce qui peut presque toujours se pratiquer ainsi dans les opérations de détail à l'aide d'un théodolite, ou bien quand le graphomètre ou le cercle répétiteur est garni de lunettes plongeantes, auquel cas son limbe se dispose toujours horizontalement (n° 9).

Il est nécessaire aussi de vérifier sur le terrain si les longueurs des côtés de la figure sont exactes. Pour cet effet, on inscrit le polygone dans le rectangle $xyzt$, dont on détermine les quatre côtés, en résolvant les triangles rectangles BCx, CDy, EDz, AEt, dans chacun desquels on connaît l'hypoténuse et les angles. On est certain alors qu'il ne s'est glissé aucune erreur dans la mesure des côtés du polygone, lorsque ceux opposés du rectangle circonscrit sont égaux. Voici le calcul des côtés des triangles dont il est question.

$$\text{Triangle } BCx \left\{ \begin{array}{lll} & & 1{,}9860211 = 96^{m},83 = Bx \\ \log \sin 32^{gr.} & = & 9{,}6828250 \\ \log 201^{m.} & = & 2{,}3031961 \\ \log \cos 32^{gr.} & = & 9{,}9426561 \\ \hline & & 2{,}2458522 = 176{,}14 = Cx \end{array} \right.$$

Triangle DCy		1,9729764	= 93 ,97	= Cy
	log sin 18^{gr},10 =	9,4479316		
	log $335^{m.}$ =	2,5250448		
	l. cos 18^{gr}, 10 =	9,9822053		
		2,5072501	= 321 ,55	= Dy
Triangle EDz		2,0937867	= 124 ,10	= Dz
	log sin 36^{gr},25 =	9,7317002		
	log 230^{m},19 =	2,3620865		
	l. cos 36^{gr},25 =	9,9254241		
		2,2875106	= 193 ,87	= Ez
Triangle EAt		1,3935725	= 24 ,75	= At
	log sin $20^{gr.}$ =	9,4899824		
	log 80^{m},09 =	1,9035901		
	log cos $20^{gr.}$ =	9,9782063		
		1,8817964	= 76 ,17	= Et

Comme chaque côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé à ce côté, en supposant toutefois le rayon des tables égal à l'unité, il est clair que pour avoir, 1°. le logarithme du côté Bx du triangle BCx, il faut au logarithme de $201^{m.}$ ajouter le logarithme sinus de $32^{gr.}$; 2°. que pour obtenir le logarithme du côté Cx, il faut de même au logarithme de 201 ajouter celui du cosinus de 32^{gr}, et ainsi pareillement pour tous les autres triangles dont il est d'ailleurs très facile de déterminer les angles aigus.

Il résulte de ce calcul que

$$xt = 445^{m},68, \quad yz = 445^{m},65,$$
$$xy = 270,11, \quad zt = 270,04.$$

On peut donc conclure de ces résultats que les mesures ont été assez bien prises.

Pour déterminer maintenant l'aire du polygone ABCDE, on calculera celle du rectangle $xyzt$, et on en retranchera les aires des quatre triangles BCx, CDy, DEz, AEt; le

reste sera l'aire cherchée. Mais auparavant il faut faire disparaître les petites erreurs qui existent entre les longueurs xt, yz, et xy, zt. On prendra donc pour *longueur réduite* du rectangle $\frac{xt+yz}{2} = 445^m,66$, et pour *largeur moyenne* $\frac{yx+zt}{2} = 270^m,07$. On pourra ensuite augmenter zE de $0^m,03$, et diminuer Cx de $0^m,04$, parce qu'il est plus convenable de faire porter la correction sur les plus longues lignes. Quant à la correction relative à la longueur du rectangle, elle est si faible qu'il est inutile d'y avoir égard dans le calcul des triangles dont il s'agit. Cela posé, on aura, en opérant par les logarithmes, pour abréger,

Logarithmes des aires.		*Aires.*	
Rectangle xyzt.			
base	2,6490037		
hauteur	2,4314763		
	5,0804800		$120359^{mc},4$
Triangle BCx			
B.	1,9860211		
H.	2,2457594		
comp. log 2 =	9,6989700		
	3,9307505	$8526^{mc},1$	
Triangle DCy.			
B.	1,9729764		
H.	2,5072501		
comp log 2 =	9,6989700		
	4,1791965	15107 , 6	
		23633 , 7	120359 , 4

De l'autre part... 23633 , 7 120359 , 4

Triangle EDz.

B. 2,0937836
H. 2,2875778
comp log 2 = 9,6989700
4,0803314 12031 , 8

Triangle AEt.

B. 1,3935725
H. 1,8817964
comp log 2 = 9,6989700
2,9743389 942 , 6

36608^{mc},1 — 36608 , 1

Aire du polygone..... 83751^{mc},3

Il n'est pas toujours possible, comme dans cet exemple, de mesurer tous les côtés et tous les angles d'un polygone; souvent même on n'a d'autre parti à prendre que de choisir pour base unique un des côtés, et de déterminer les sommets des angles par intersections, ainsi qu'il a été enseigné au n° 21. Voyons donc comment on peut, dans ce cas, en évaluer la surface.

Soient ABCDE [fig. 24] le polynome convexe proposé, AB$=a$ la base mesurée; soient en outre EAB$=\varepsilon$, DAB$=\delta$, CAB $=\gamma$ les angles observés au point A, et EBA $=\varepsilon'$, DBA $=\delta'$, CBA $=\gamma'$, les angles observés au point B. Pour obtenir à l'aide de ces seules données, l'expression analytique de l'aire de ce polygone, nous le concevrons divisé en triangles qui aient leurs sommets à l'une des extrémités de la base AB; tels sont, par exemple, les triangles EAD, DAC, CAB. Or, d'après ce qu'on a vu au n° 29,

$$\text{surf. EAD} = \frac{\text{AE} \times \text{AD}}{2} \sin \text{EAD};$$

mais dans le triangle AEB on a

$$\sin(\varepsilon + \varepsilon') : a :: \sin \varepsilon' : \mathrm{AE} = \frac{a \sin \varepsilon'}{\sin(\varepsilon + \varepsilon')}.$$

Dans le triangle DAB on a pareillement

$$\sin(\delta + \delta') : a :: \sin \delta' : \mathrm{AD} = \frac{a \sin \delta'}{\sin(\delta + \delta')}.$$

Introduisant ces valeurs dans l'expression précédente, on obtient

$$\int.\mathrm{EAD} = \frac{a^2}{2} \frac{\sin \varepsilon' \sin \delta'}{\sin(\varepsilon + \varepsilon') \sin(\delta + \delta')} . \sin(\varepsilon - \delta).$$

Concluons de là que

$$\int.\mathrm{DAC} = \frac{a^2}{2} \frac{\sin \delta' \sin \gamma'}{\sin(\delta + \delta') \sin(\gamma + \gamma')} . \sin(\delta - \gamma).$$

$$\int.\mathrm{CAB} = \frac{a^2}{2} \frac{\sin \gamma \sin \gamma'}{\sin(\gamma + \gamma')}.$$

Par conséquent l'aire cherchée, ou

$$\int.\mathrm{AEDCB} = \tfrac{1}{2} a^2 \left\{ \begin{array}{l} + \dfrac{\sin \varepsilon' \sin \delta' \sin(\varepsilon - \delta)}{\sin(\varepsilon + \varepsilon') \sin(\delta + \delta')} \\ + \dfrac{\sin \delta' \sin \gamma' \sin(\delta - \gamma)}{\sin(\delta + \delta') \sin(\gamma + \gamma')} \\ + \dfrac{\sin \gamma \sin \gamma'}{\sin(\gamma + \gamma')} \end{array} \right\}.$$

Voilà tout ce que je me suis proposé de dire ici concernant le levé des plans et le calcul des surfaces, par les méthodes les plus simples; cela me paraît, en effet, suffisant pour ceux qui ne veulent faire, sur le terrain, des applications de la trigonométrie que pour leur utilité personnelle; mais les *Traités de Géodésie* et de *Topographie* forment une doctrine complète à ce sujet, et réunissent plusieurs théories importantes que j'ai principalement développées en faveur des Ingénieurs qui dirigent ou exécutent de grands travaux géodésiques.

RECUEIL

DE DIVERSES PROPOSITIONS

DE GÉOMÉTRIE,

RÉSOLUES OU DÉMONTRÉES PAR L'ANALYSE ALGÉBRIQUE.

SECONDE SECTION.

GÉOMÉTRIE A DEUX DIMENSIONS.

CHAPITRE PREMIER.

De la Polygonométrie.

31. On entend par *polygonométrie* l'art de déterminer dans un polygone rectiligne quelconque plusieurs de ses parties à l'aide de celles qui sont connues. Pour effectuer de telles opérations, il faut donc, comme pour les triangles, connaître les diverses relations qui existent entre les côtés et les angles d'un polygone. Ces relations, qui sont autant de théorèmes fondamentaux, donnent lieu par leur combi-

naison à d'autres théorèmes ou propriétés de ces figures. Les premiers essais qui furent faits en ce genre sont dus à Lambert; mais ce géomètre ne s'occupa que des quadrilatères, et encore se borna-t-il à indiquer la marche à suivre pour former une *tétragonométrie* complète. Après lui, d'autres savans étendirent cette théorie; entre autres Lexell, dans deux excellentes Dissertations insérées dans les 19e et 20e volumes des *Mémoires de Pétersbourg*. Enfin, de nos jours, MM. Lhuilier de Genève et Carnot ont enrichi cette matière de leurs propres découvertes. Nous nous bornerons ici à démontrer les propositions les plus importantes de la Polygonométrie.

Théorème.

32. *Dans tout polygone plan, chaque côté est égal à la somme de tous les autres, multipliés chacun par le cosinus de l'angle qu'il forme avec le premier.*

[Fig. 22.] Ce théorème est évident à l'inspection de la figure; car dans le quadrilatère ABCD la base AB est égale à la somme des segmens Ad, dc, cB, et chacun de ces segmens est égal à l'hypoténuse du triangle auquel il appartient, multipliée par le cosinus que cette ligne fait avec AB ou avec sa parallèle c'D.

Soient donc AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$; et désignons par (a, b) l'angle ABC, par (a, c) l'angle CDc', par (a, d) l'angle BAD; on aura

$$a = b\cos(a, b) + c\cos(a, c) + d\cos(a, d).$$

Cette proposition, qui sert de base à la théorie que nous allons développer, n'est pas restreinte aux polygones plans, comme il est aisé de le démontrer; et l'on conçoit bien qu'elle s'applique aussi à un polygone d'un plus grand nombre de côtés que celui que nous considérons en ce moment.

Il est entendu qu'il ne s'agit, dans la formule précédente, que des angles intérieurs de la figure : alors s'il s'en trouvait d'obtus, leurs cosinus seraient négatifs. *Voyez* pour la règle des signes qui doivent affecter les lignes trigonométriques, la *Trigonométrie* de M. Legendre, ou celle de M. Lacroix, ou le n° 2 du présent Ouvrage.

THÉORÈME.

33. *Dans tout polygone, la somme de ses côtés multipliés chacun par le cosinus de l'angle que forme sa direction, prise dans le sens du périmètre, avec une droite quelconque tracée à volonté dans le plan de ce polygone, est égale à zéro.*

[Fig. 23.] Soit AX la droite à laquelle on rapporte tous les côtés du polygone ABCD, et nommons x cette droite indéfinie. On aura en vertu du n° précédent, et en faisant usage de la notation qui y est énoncée,

$$\overline{Ab} = b\cos(b, x) + c\cos(c, x) + d\cos(d, x);$$

d'un autre côté, le triangle rectangle ABb donne

$$\overline{Ab} = a\cos(BAX):$$

de là

$$a\cos(BAX) = b\cos(b, x) + c\cos(c, x) + d\cos(d, x);$$

mais en général $\cos(200^{gr} - z) = -\cos z$, donc

$$\cos(BAX) = -\cos(BAX') = -\cos(a, x);$$

donc

$$a\cos(a, x) + b\cos(b, x) + c\cos(c, x) + d\cos(d, x) = 0.$$

Ainsi dans le calcul de cette formule, comme dans toutes celles que nous donnerons par la suite, il faut avoir égard aux signes des cosinus. La règle des signes est même sous-entendue nécessairement dans l'énoncé de la proposition actuelle, qui, sans cela, ne serait point exacte.

THÉORÈME.

34. *Dans tout polygone, le carré d'un côté quelconque est égal à la somme des carrés de tous les autres côtés, moins deux fois les produits de tous ces autres côtés multipliés deux à deux et par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent* (*).

[Fig. 24.] Soient toujours $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$...., on aura, par le théorème précédent,

$$a = b \cos(a, b) + c \cos(a, c) + d \cos(a, d),$$
$$b = a \cos(a, b) + c \cos(b, c) + d \cos(b, d),$$
$$c = a \cos(a, c) + b \cos(b, c) + d \cos(c, d),$$
$$d = a \cos(a, d) + b \cos(b, d) + c \cos(c, d),$$
.....

Multipliant par a la première de ces équations, par b la seconde, par c la troisième, et par d la quatrième; ensuite ôtant les trois derniers produits du premier, il viendra

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2[bc\cos(b, c) + bd\cos(b, d) + cd\cos(c, d)],$$

résultat qui démontre la chose, et fait voir que la propriété connue du triangle obliquangle n'est qu'un cas particulier de ce principe général.

Pour introduire dans la formule ci-dessus les angles mêmes du polygone, on remarquera que

$$\text{angle}(b, c) = C, \text{ angle}(b, d) = C + D - 200^{gr}, \text{ angle}(c, d) = D,$$

donc

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2[bc \cos C - bd \cos(C + D) + cd \cos D].$$

(*) Cette proposition et la précédente seraient encore vraies, quand même le polygone serait *gauche*, c'est-à-dire n'aurait pas ses quatre côtés dans un même plan.

La même méthode appliquée au pentagone ABCDE donnerait

$$a^2=b^2+c^2+d^2+e^2-2\left[\begin{array}{l} bc\cos C-bd\cos(C+D)+be\cos(C+D+E) \\ +cd\cos D-ce\cos(D+E)+de\cos E \end{array}\right]$$

équation qui a encore lieu pour tout autre polygone, quel que soit le nombre de ses côtés, et au moyen de laquelle on est en droit de conclure que si les angles d'un polygone varient d'une manière quelconque, mais que les côtés conservent leur grandeur, la somme des produits de tous ces côtés multipliés deux à deux et par le cosinus de l'angle compris sera toujours une quantité constante. En effet, en faisant $a=0$, cette propriété se manifeste tout d'abord pour le quadrilatère.

THÉORÈME.

35. *Le double de l'aire d'une figure rectiligne quelconque est égal à la somme des produits de ses côtés, excepté un, multipliés deux à deux et par les sinus des angles qu'ils comprennent.*

[Fig. 22.] Désignons par S l'aire du quadrilatère cherchée. Si l'on prolonge CD et AB jusqu'à leur rencontre en O, l'on aura

$$\text{aire ABCD} \quad \text{ou} \quad S=OCB-ODA,$$

et si l'on fait $OA=\alpha$, $OD=\gamma$, le principe connu donnera

$$OCB=\tfrac{1}{2}(c+\gamma)(a+\alpha)\sin O,$$
$$ODA=\tfrac{1}{2}\alpha\gamma\sin O;$$

pour lors

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2}(c+\gamma)(a+\alpha)\sin O-\tfrac{1}{2}\alpha\gamma\sin O \\ &= \tfrac{1}{2}ac\sin O+\tfrac{1}{2}a\gamma\sin O+\tfrac{1}{2}\alpha c\sin O. \end{aligned}$$

D'ailleurs le triangle ODA donnant

$$\left.\begin{array}{l} \alpha : d :: \sin D : \sin O, \\ \gamma : d :: \sin A : \sin O, \end{array}\right\} \text{ on aura } \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{d \sin D}{\sin O}, \\ \gamma = \dfrac{d \sin A}{\sin O}, \end{array}\right.$$

et la valeur de S deviendra

$$S = \tfrac{1}{2} ac \sin O + \tfrac{1}{2} ad \sin A + \tfrac{1}{2} cd \sin D.$$

On peut introduire dans cette formule les angles du polygone, car

$$(a, c) = O = A + D - 200^{gr}, \quad (a, d) = A, \quad (c, d) = D;$$

donc

$$S = \tfrac{1}{2} [ad \sin A - ac \sin (A + D) + cd \sin D].$$

Un procédé analogue donnerait pour l'aire du pentagone ABCDE [fig. 24],

$$S = \tfrac{1}{2} \left[\begin{array}{l} ab \sin B - ac \sin (B + C) + ad \sin (B + C + D) \\ + bc \sin C - bd \sin (C + D) + cd \sin D \end{array}\right],$$

et ainsi de même pour tous les autres polygones.

Il ne faut pas oublier, en appliquant ces formules, qu'il s'agit, comme dans les n^os précédens, des angles intérieurs du polygone. Le principal avantage de ces mêmes formules, c'est qu'elles dispensent de construire une figure. Elles se présenteraient sous une forme plus symétrique, relativement aux signes, si au lieu des angles intérieurs du polygone, on employait les angles extérieurs; c'est-à-dire ceux qui sont formés par un côté de la figure et le prolongement du côté suivant. Il existe d'autres méthodes pour évaluer l'aire d'un polygone, ainsi qu'on l'a vu précédemment. En les employant concurremment; on aura des moyens de vérification.

Idée de la résolution des Polygones.

36. [Fig. 22.] Connaissant dans le quadrilatère ABCD

les côtés b, c, d, et les angles A, D; on demande les autres parties de ce polygone.

On voit sur-le-champ que l'ordonnée Cc est égale à

$$b \sin(a, b) = c \sin(a, c) + d \sin(a, d),$$

ou bien que

$$b \sin B = d \sin A - c \sin(A + D);$$

ainsi on obtiendra immédiatement, par cette formule, la valeur de l'angle B.

Maintenant pour trouver le côté a, on aura recours à la formule

$$a \sin(b, a) = c \sin(b, c) + d \sin(b, d),$$

ou

$$a \sin B = c \sin C - d \sin(C + D),$$

qui est analogue à la précédente, et dans laquelle tous les angles sont connus, puisque l'on a $(b, c) = 400^{gr} - A - B - D$; ou bien l'on emploiera la formule

$$a = b \cos(a, b) + c \cos(a, c) + d \cos(a, d),$$

démontrée au n° 32.

De ce que l'on a

$$b \cos(a, b) = a - c \cos(a, c) - d \cos(a, d)$$

et

$$b \sin(a, b) = c \sin(a, c) + d \sin(a, d);$$

il s'ensuit qu'en divisant ces deux équations l'une par l'autre,

$$\text{tang}(a, b), \text{ ou } \text{tang } B = \frac{d \sin A - c \sin(A + D)}{a - d \cos A + \cos(A + D)},$$

et par la même raison

$$\text{tang } A = \frac{c \sin D - b \sin(C + D)}{d - c \cos D + b \cos(C + D)}.$$

Telle serait la formule dont il faudrait faire usage pour déterminer le troisième angle d'un quadrilatère, si l'on connaissait trois de ses côtés et les angles compris entre les côtés connus.

[Fig. 24] On demande de résoudre de la même manière le pentagone ABCDE.

L'inspection de la figure fait assez connaître que l'on a, comme ci-dessus,

$$b \sin B = e \sin A - d \sin (A + E) + c \sin (A + E + D);$$

mais si au lieu de calculer B il fallait déduire de cette équation la valeur de l'angle A, on serait obligé de développer les facteurs dans lesquels cet angle se trouve engagé. On aurait, par exemple,

$$b \sin B = e \sin A - d \sin A \cos E - d \cos A \sin E$$
$$+ c \sin A \cos (D + E) + c \cos A \sin (D + E);$$

et après avoir substitué pour cos A sa valeur $\sqrt{1 - \sin^2 A}$, on verrait que l'inconnue sin A serait donnée par une équation du second degré.

Lorsque dans l'équation précédente l'on a $b = 0$, le pentagone se change en quadrilatère, et pour lors on a

$$\text{tang } A = \frac{d \sin E - c \sin (D + E)}{e - d \cos E + c \cos (D + E)},$$

ou en employant la notation qui convient au quadrilatère ABCD,

$$\text{tang } A = \frac{c \sin D - b \sin (C + D)}{d - c \cos D + b \cos (C + D)},$$

comme ci-dessus.

Tels sont quelques-uns des cas qui se présentent dans la résolution des polygones, et que l'on pourrait traiter par la simple Trigonométrie, comme je l'ai fait voir ailleurs. J'engage ceux qui veulent acquérir des connaissances plus étendues sur cette matière et sur les propriétés de ces figures, à lire la Polygonométrie de M. Lhuilier, et la section IV de la Géométrie de position de Carnot, deux des ouvrages les plus remarquables en ce genre.

Nous allons chercher maintenant les propriétés de l'étendue, par une autre voie analytique.

CHAPITRE II.

Notions préliminaires sur l'application de l'Algèbre à la Géométrie.

Équation de la ligne droite, et conséquences qui en résultent.

37. La plupart des formules suivantes n'étant qu'une récapitulation des principaux résultats analytiques connus, nous renvoyons, pour tous les éclaircissemens que l'on pourrait désirer, aux ouvrages qui ont été publiés sur cette matière; et nous prévenons, une fois pour toutes, que, pour éviter les redites, les numéros qui se rapporteront au *Traité d'application de l'Algèbre à la Géométrie*, par M. Lacroix (7e édition), seront seulement accompagnés des deux lettres L. C.

Une droite qui passe par l'origine des coordonnées rectangles, a pour équation

$$y = ax,$$

a étant la tangente trigonométrique de l'angle formé par cette droite et par l'axe des abscisses, et x, y, étant les coordonnées *courantes*, ou l'abcisse et l'ordonnée d'un point quelconque de la droite.

L'équation d'une droite qui ne passe pas par l'origine des axes [fig. 25], est généralement représentée par

$$y = Ax + B,$$

la quantité toute connue B étant l'ordonnée correspondante

a $x = 0$. Nous supposerons en général les coordonnées d'un point positives; autrement, nous ferons remarquer la circonstance qui nous oblige à les prendre négativement.

Si le cours d'une droite est particularisé par l'équation

$$y = ax - b,$$

c'est alors le cas de la figure 26.

S'il l'est par l'équation

$$y = -ax + b,$$

c'est le cas de la figure 27.

S'il l'est par l'équation

$$y = -ax - b,$$

c'est le cas de la figure 28.

38. L'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées est $x = a$.

De même l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses est $y = b$.

39. Une droite assujettie à passer par un point dont les coordonnées sont α, β, et à faire avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente est a, a pour équation

$$y - \beta = a(x - \alpha).$$

Si cette droite devait passer par un autre point α', β', son équation serait de même

$$y - \beta' = a(x - \alpha').$$

Par conséquent, en éliminant a entre ces deux équations, celle d'une droite passant par les deux points dont il s'agit serait

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha).$$

40. Deux droites sont parallèles entre elles lorsque leurs équations sont respectivement

$$y = ax + b, \quad y = ax + b';$$

c'est-à-dire, quand le coefficient de x est le même de part et d'autre.

41. Aucune des équations précédentes ne change de forme lorsque les coordonnées x, y, sont obliques; mais alors a, qui est le coefficient de x dans ces mêmes équations, désigne simplement le rapport d'une ordonnée à l'abscisse correspondante. Ainsi, en désignant par ρ une droite quelconque, par (ρ, x) et (ρ, y) les angles qu'elle fait respectivement avec l'axe des x et celui des y, on a

$$a = \frac{\sin(\rho, x)}{\sin(\rho, y)} = \frac{\sin(\rho, x)}{\sin(x, y - \rho, x)},$$

et par conséquent

$$y = \frac{\sin(\rho, x)}{\sin(\rho, y)} x + b$$

est l'équation de la droite dont il s'agit, rapportée aux coordonnées obliques.

42. Deux droites représentées par les équations aux coordonnées rectangles

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b'$$

sont perpendiculaires l'une à l'autre, lorsque l'équation $aa' + 1 = 0$ a lieu; c'est-à-dire, lorsque a' est avec un signe contraire la cotangente de l'angle dont a est la tangente.

43. Si l'équation d'une droite est $y = ax + b$, la longueur de la perpendiculaire abaissée sur cette droite d'un point dont les coordonnées positives sont α, β, sera exprimée par

$$\pm \frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}};$$

le signe supérieur ayant lieu pour le cas où la droite est située entre le point donné et l'axe des abscisses, et le signe inférieur ayant lieu pour le cas où le point donné est entre la droite et l'axe des abscisses.

44. Deux droites, ou deux lignes quelconques qui se coupent, ont à leur point d'intersection les mêmes coordonnées; ainsi on déterminera analytiquement ce point, en résolvant deux équations entre deux inconnues.

45. Lorsque deux droites qui se coupent ont pour équations

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b',$$

et qu'elles sont rapportées à des axes rectangulaires, le cosinus de l'angle qu'elles forment entre elles est

$$\frac{1 + aa'}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}};$$

le sinus du même angle est

$$\frac{a' - a}{\sqrt{1 + a^2}\sqrt{1 + a'^2}},$$

et sa tangente est

$$\frac{a' - a}{1 + aa'};$$

le rayon des tables étant égal à l'unité. Mais lorsque a est négative, cette dernière expression se change en

$$\frac{a + a'}{1 - aa'}.$$

Dans le premier cas, l'angle dont il est question est la différence des angles dont les tangentes sont a, a'; et dans le second cas, il en est la somme.

46. Il est intéressant de chercher les modifications qu'éprouvent les résultats précédens, lorsque les droites sont rapportées à des axes obliques. Parmi les moyens que l'on peut employer à cet effet, celui qui dérive de l'ingénieuse théorie développée dans le n° 9 de la Correspondance sur l'École Polytechnique, par M. Français, officier au corps royal du Génie, me paraît le plus naturel et le plus élégant, et mérite d'être exposé dans les ouvrages élémentaires.

Par exemple, soit

$$\beta x = \alpha y, \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta},$$

l'équation d'une droite ρ, passant par l'origine des axes, et rapportée à des coordonnées obliques x, y. Si $x_{(1)}$, $y_{(1)}$ sont les coordonnées rectangulaires de l'extrémité de ρ, et si l'axe des $x_{(1)}$ coïncide avec celui des x, la partie de l'axe des abscisses comprise entre les ordonnées y et $y_{(1)}$ sera, en vertu de la propriété du triangle rectangle,

$$x_{(1)} - x = y \cos(x, y),$$

d'où

$$x_{(1)} = x + y \cos(x, y);$$

mais les trois droites $x_{(1)}$, $y_{(1)}$ et ρ formant un triangle rectangle, on aura encore

$$x_{(1)} = \rho \cos(\rho, x);$$

égalant donc ces valeurs, et faisant attention que..... $x = \alpha\rho$, $y = \beta\rho$, on aura

$$\cos(\rho, x) = \alpha + \beta \cos(x, y);$$

ou

$$\cos(\rho, x) = \frac{1}{\rho}[x + y \cos(x, y)]; \qquad (1)$$

on trouverait de même que

$$\cos(\rho, y) = \beta + \alpha \cos(x, y),$$

ou

$$\cos(\rho, y) = \frac{1}{\rho}[y + x \cos(x, y)]. \qquad (2)$$

Puis, si de l'extrémité de x on abaisse une perpendiculaire sur la droite ρ, cette droite sera évidemment composée des deux parties $x \cos(\rho, x)$, $y \cos(\rho, y)$; de sorte qu'on aura

$$\rho = x \cos(\rho, x) + y \cos(\rho, y), \qquad (3)$$

partant

$$1 = \alpha \cos(\rho, x) + \beta \cos(\rho, y); \qquad (m)$$

et si on multiplie par ρ tous les termes de l'équation (3), ensuite qu'on ait égard aux relations (1, 2), on arrivera à cette propriété connue du triangle obtusangle ρxy, savoir :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos(x, y); \qquad (4)$$

ou, ce qui est de même, on aura cette relation

$$1 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos(x, y); \qquad (n)$$

puisque $\frac{x^2}{\rho^2} = \alpha^2$, et $\frac{y^2}{\rho^2} = \beta^2$.

Nous ferons remarquer, par occasion, que les équations (1, 2, 4) seraient celles qu'il faudrait employer immédiatement pour déterminer, en Mécanique, l'intensité et la direction de la résultante de deux puissances, données elles-mêmes d'intensité et de direction, et appliquées au même point.

Il est aisé de voir en outre que dans le triangle ρxy, on a

$$\sin(\rho, x) = \frac{y \sin(x, y)}{\rho},$$

$$\sin(\rho, y) = \frac{x \sin(x, y)}{\rho}.$$

Ainsi, en divisant ces équations par celles (1, 2), il vient

$$\tang(\rho, x) = \frac{y \sin(x, y)}{x + y \cos(x, y)},$$

$$\tang(\rho, y) = \frac{x \sin(x, y)}{y + x \cos(x, y)}.$$

Concluons de ce qui précède, que si l'équation d'une autre droite passant par l'origine est

$$\beta' x = \alpha' y, \quad \text{ou} \quad \rho' = \frac{x}{\alpha'} = \frac{y}{\beta'},$$

on aura entre les coefficiens α', β', les mêmes relations qu'entre α, β.

Voyons maintenant quelle est l'expression du cosinus de l'angle formé par les deux droites ρ, ρ'. Si l'on désigne par x, y les coordonnées de l'extrémité de ρ, et par x', y' celles de l'extrémité de ρ', on aura pour le carré de la ligne qui joint ces deux points

$$\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\rho, \rho') = (x - x')^2 + (y - y')^2 + 2(x - x')(y - y') \cos(x, y);$$

développant le second membre, ensuite substituant pour x, y, x', y', leurs valeurs respectives $\alpha\rho$, $\beta\rho$, $\alpha'\rho'$, $\beta'\rho'$, et réduisant à l'aide de la relation (n) et de son analogue en α', β', on obtiendra

$$\cos(\rho, \rho') = \alpha\alpha' + \beta\beta' + (\alpha\beta' + \alpha'\beta) \cos(x, y),$$

et par suite

$$\cos(\rho, \rho') = \alpha \cos(\rho', x) + \beta \cos(\rho', y)$$
$$= \alpha' \cos(\rho, x) + \beta' \cos(\rho, y).$$

Nous pouvons vérifier cette expression, car elle doit coïncider avec celle du n° 45, lorsque les axes sont rectangulaires. En effet, il résulte de cette hypothèse, que

$$\frac{\beta}{\alpha} = \text{tang}(\rho, x) = a; \quad \frac{\beta'}{\alpha'} = \text{tang}(\rho', x) = a';$$

et que

$$\cos(\rho, y) = \sin(\rho, x), \quad \cos(\rho', y) = \sin(\rho', x);$$

ainsi l'expression dont il s'agit devient

$$\cos(\rho, \rho') = (1 + aa')\alpha \cos(\rho', x)$$
$$= (1 + aa')\alpha' \cos(\rho, x).$$

Dans la même circonstance les valeurs ci-dessus de $\cos(\rho, x)$ et $\cos(\rho', x)$ se réduisent et sont respectivement α, α'; donc, à cause de.....

$\cos(\rho, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2(\rho, x)}}$, on a, comme au n° cité,

$$\cos(\rho, \rho') = \frac{1 + aa'}{\sqrt{1 + a^2}\sqrt{1 + a'^2}}.$$

Complétons cette théorie, et dans cette vue cherchons la relation qui doit exister entre les coefficiens des équations de deux droites perpendiculaires entre elles. Pour cet effet, si nous faisons attention que la longueur de la ligne ρ est la distance de l'origine à la droite perpendiculaire à cette ligne et passant par son extrémité, nous devons en conclure que l'équation de cette perpendiculaire est

$$\rho = x\cos(\rho, x) + y\cos(\rho, y).$$

Si donc, pour abréger, l'on fait

$$\cos(\rho, x) = \mathrm{A}, \quad \cos(\rho, y) = \mathrm{B},$$

la relation (m) sera

$$\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta = 1:$$

telle est celle qui doit avoir lieu entre α, β, A, B, pour que les droites données par les équations aux coordonnées obliques, savoir,

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x, \quad \mathrm{A}x + \mathrm{B}y = \rho$$

soient perpendiculaires l'une à l'autre. On a aussi

$$\mathrm{A} = \alpha + \beta\cos(x, y), \quad \mathrm{B} = \beta + \alpha\cos(x, y);$$

d'où l'on voit que quand $\cos(x, y) = 0$, ces valeurs satisfont à l'équation de condition du n° 42.

L'équation précédente $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y = \rho$, d'une ligne droite, prend, en la divisant par ρ, cette forme très simple,

$$\frac{x}{\mathrm{M}} + \frac{y}{\mathrm{N}} = 1,$$

et ne contient de la sorte aucune constante superflue. Celles M, N, sont appelées les *paramètres* de la droite, et représentent respectivement les portions des axes comprises entre cette ligne et l'origine des coordonnées (p. 307. L. C.)

Equation du cercle, et solution du problème concernant un cercle qui en coupe deux autres.

47. L'équation générale du cercle aux coordonnées rectangles est

$$(1) \qquad (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = r^2,$$

α et β étant les coordonnées du centre, et r le rayon.

Lorsque l'origine est rapportée à l'extrémité du diamètre, l'équation du cercle devient

$$y^2 = 2rx - x^2;$$

et quand l'origine est au centre, on a simplement

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Il est facile de s'assurer que l'équation la plus générale du cercle aux coordonnées obliques est, d'après le n° 46,

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(y-\alpha)(y-\beta)\cos(x, y) = r^2.$$

Ainsi les trois équations ci-dessus ne sont que des cas particuliers de cette dernière.

Pour tirer quelques conséquences utiles de l'équation (1), résolvons le problème suivant :

Prob. *Supposant qu'un cercle* C *en coupe deux autres,* C′, C″; *on propose de déterminer le point de concours des deux cordes d'intersection qui sont communes aux cercles* CC′, CC″.

Solut. Désignons respectivement par r, r', r'', les rayons des cercles C, C′, C″, et par α, β les coordonnées rectangles du 1er cercle. Prenons le centre du cercle C′ pour origine des axes, et le centre du cercle C″ sur l'axe des x à une distance de cette origine égale à α''.

Cela posé, les équations de ces courbes circulaires, rapportées à des coordonnées rectangles, seront

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2, \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 = r'^2, \qquad (2)$$
$$(x-\alpha'')^2 + y^2 = r''^2; \qquad (3)$$

et si l'on suppose que les deux premières aient lieu à la fois, ou, ce qui est de même, que les x, y, soient les coordonnées d'un même point, on aura, en soustrayant ces équations l'une de l'autre,

$$2\alpha x + 2\beta y = r'^2 - r^2 + \alpha^2 + \beta^2; \qquad (4)$$

c'est celle de la 1re corde.

Si l'on suppose pareillement que la première équation et la deuxième aient lieu en même temps, il viendra, en les soustrayant,

$$2\alpha'' x - 2\alpha x - 2\beta y = r^2 - r''^2 + \alpha''^2 - \alpha^2 - \beta^2; \qquad (5)$$

c'est l'équation de la 2e corde; et puisqu'au point de concours de ces deux lignes les valeurs de x, y sont les mêmes, on aura sur-le-champ l'abscisse de ce point en ajoutant les équations (4, 5), c'est-à-dire

$$x = \frac{r'^2 - r''^2 + \alpha''^2}{2\alpha''}.$$

Il suit de là, que le point cherché est sur une droite perpendiculaire à la ligne qui joint les centres des cercles C′, C″; cette droite est ce qu'on appelle *l'axe radical* de ces cercles, soit qu'ils se coupent, soit qu'ils ne s'atteignent pas. Son équation s'obtient de suite en feignant que les équations (2, 3) s'accordent entre elles; et comme elle est tout-à-fait indépendante du rayon et de la position du centre du cercle C, il est évident que si l'on décrit arbitrairement un cercle qui coupe les deux autres C′ et C″ donnés, les deux cordes qui joignent les points d'intersection concourront à un point de l'axe radical.

Le point où cet axe rencontre la ligne des centres est dit le *centre radical* de ces mêmes cercles. *La différence des carrés de ses distances aux centres des cercles est donc égale à la différence des carrés des rayons respectivement.*

Une propriété de l'axe radical de deux cercles est que les tangentes menées de l'un quelconque de ses points à ces

deux cercles, et terminées à leurs points de contact, sont égales entre elles. (Voyez sur ce sujet, dans les *Ann. math.* de M. Gergonne, un mémoire intéressant sur la théorie des contacts des cercles, des sphères, des cylindres et des cônes, par M. Durande, tom. XI.)

Monge appelle *centre de similitude* de deux cercles, un point de la droite menée par leurs centres, et tel que ses distances à ces points soient respectivement proportionnelles aux rayons des deux cercles. Ainsi, lorsque deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, les sommets des angles circonscrits, tant intérieurs qu'extérieurs, sont respectivement les centres de similitude interne et externe de ces cercles.

On a nommé récemment *pôles conjugués* d'un cercle deux points en ligne droite avec son centre, et du même côté de ce centre, tel que le rayon est moyen proportionnel à leurs distances à ce centre; d'où il suit que le sommet d'un angle circonscrit à un cercle et le milieu de sa corde de contact sont deux pôles conjugués l'un à l'autre.

Considérons maintenant les cercles r, r', r'', situés sur un même plan, rapportés à des axes rectangles et donnés par les équations suivantes:

$$\begin{array}{ll} (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 & \text{ou } A=0, \\ (x-\alpha')^2+(y-\beta')^2=r'^2 & A'=0, \\ (x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2=r''^2 & A''=0. \end{array}$$

Lorsqu'ils se coupent deux à deux, les équations des trois cordes communes à ces cercles sont évidemment

$$A-A'=0,\quad A-A''=0,\quad A'-A''=0,$$

ou bien

$$(1')\quad 2(\alpha'-\alpha)x+2(\beta'-\beta)y=r^2-r'^2+\alpha'^2-\alpha^2+\beta'^2-\beta^2,$$
$$(2')\quad 2(\alpha''-\alpha)x+2(\beta''-\beta)y=r^2-r''^2+\alpha''^2-\alpha^2+\beta''^2-\beta^2,$$
$$(3')\quad 2(\alpha''-\alpha')x+2(\beta''-\beta')y=r'^2-r''^2+\alpha''^2-\alpha'^2+\beta^2-\beta'^2.$$

Or l'une de ces dernières étant comportée par les deux autres, il s'ensuit que les trois droites (1′, 2′, 3′) concourent au même point, quand même les cercles ne se couperaient pas.

Transformation des coordonnées sur un plan.

48. C'est surtout pour pouvoir discuter plus aisément les équations des courbes en les ramenant à une forme plus simple, sans cependant leur ôter rien de leur généralité, que l'on fait usage de la transformation des axes. Si l'on veut seulement changer l'origine, en laissant les nouvelles coordonnées parallèles aux primitives, on fera, dans l'équation d'une ligne,

$$(1) \qquad x = t + \alpha, \quad y = u + \beta,$$

α et β étant les coordonnées de la nouvelle origine, et t, u, les nouvelles variables comptées de ce point.

Si au contraire on ne veut changer que la direction des axes, on emploiera les formules

$$(2) \qquad x = mt + pu, \quad y = nt + qu.$$

Les quantités m, n, p, q, ont entre elles une certaine relation (n° 123 L. C.) qui fait qu'elles ne peuvent être prises toutes les quatre à volonté. Par exemple, si les coordonnées des deux systèmes sont rectangulaires, on a

$$m = \cos(t, x), \quad p = \cos(u, x),$$
$$n = \sin(t, x), \quad q = \sin(u, x),$$
$$(u, x) - (t, x) = 1^{Q} = 100^{G};$$

par suite,

$$m^2 + n^2 = 1, \quad p^2 + q^2 = 1,$$
$$mp + nq = 0, \quad n^2 + q^2 = 1,$$

et par conséquent

$$m^2 = q^2, \quad m = q, \quad p = -n,$$
$$m^2 + p^2 = 1, \quad mn + pq = 0;$$

de là

$$x = mt - nu, \quad y = nt + mu,$$

ou

$$(3) \quad \left.\begin{aligned} x &= t \cos(t, x) - u \sin(t, x), \\ y &= t \sin(t, x) + u \cos(t, x) \end{aligned}\right\}$$

et réciproquement,

$$t = x \cos(t, x) + y \sin(t, x),$$
$$u = y \cos(t, x) - x \sin(t, x),$$

d'où l'on voit qu'en faisant dans ces dernières formules, $t = 0$, $u = 0$, on aura les équations des nouveaux axes u et t.

Si les axes primitifs étaient droits, et que les axes du second système fussent obliques, on aurait

$$(4) \quad \left.\begin{aligned} x &= t \cos(t, x) + u \cos(u, x), \\ y &= t \sin(t, x) + u \sin(u, x). \end{aligned}\right\}$$

Pour changer à la fois l'origine et la direction des axes, il faut donc employer en général les valeurs

$$(5) \quad x = mt + pu + \alpha, \quad y = nt + qu + \beta.$$

On passe d'un système de coordonnées obliques à un système de coordonnées rectangulaires, l'origine restant d'ailleurs la même, à l'aide des formules

$$t = \frac{x \sin(u, x) - y \cos(u, x)}{\sin(u, x - t, x)},$$
$$u = \frac{y \cos(t, x) - x \sin(t, x)}{\sin(u, x - t, x)},$$

ou pour simplifier la notation,

$$(6) \quad t = \frac{x \sin q - y \cos p}{\sin(q - p)}, \quad u = \frac{y \cos p - x \sin q}{\sin(q - p)};$$

celles-ci dérivent essentiellement des équations (4) résolues par rapport à t et à u.

On fait encore un fréquent usage des coordonnées po-

laires; et l'on sait, à cet égard, qu'en nommant r le *rayon vecteur*, on a

$$(7) \qquad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

φ étant l'angle que ce rayon fait avec l'axe des x. Donc réciproquemment l'on parviendra à une équation entre x et y en substituant dans celle d'une courbe, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pour $\sin\varphi$, et $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pour $\cos\varphi$.

Des différentes formes que prennent les équations des courbes du second degré, eu égard aux axes des coordonnées auxquels ces lignes peuvent être rapportées.

49. L'équation générale des courbes du second degré est représentée par

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F,$$

l'origine des coordonnées rectangles étant située d'une manière quelconque sur le plan de la courbe. Pour reconnaître l'espèce de courbe à laquelle cette équation se rapporte, dans le cas où les coefficiens A, B, C, etc., acquièrent des valeurs particulières, il suffit d'avoir égard aux trois premiers (n° 126. L. C.) Par exemple, l'équation proposée, lorsqu'elle ne peut être décomposée en deux facteurs linéaires, est à l'ellipse, à la parabole ou à l'hyperbole, selon que $4AC$ est plus grand, égal ou plus petit que B^2.

50. Lorsqu'on résout l'équation précédente par rapport à l'une des variables, à y par exemple, on obtient un résultat de cette forme,

$$y = \frac{-(Bx+D) \pm \sqrt{M}}{2A}.$$

Si l'on ne prend de cette valeur que la quantité ration-

nelle, on aura pour équation de l'un des diamètres de la courbe,

$$2Ay + Bx + D = 0;$$

cette ligne partage en deux parties égales toutes les cordes menées parallèlement à l'axe y des ordonnées, et passe par conséquent par le centre de la courbe.

Par le moyen de la transformation des axes, il est possible de simplifier beaucoup cette équation générale. En effet, on la ramène à la forme

$$(2) \qquad A't^2 + B'u^2 = F',$$

lorsque l'origine des coordonnées est transportée au centre de la courbe, et cela en y faisant d'abord $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$, pour faire disparaître les termes affectés de la première puissance de x' et de y', et ensuite en posant $x' = mt - nu$, $y' = nt + mu$ pour ôter le produit ut.

Ou bien elle devient, par des substitutions inverses,

$$(3) \qquad A't^2 + C'u^2 - E'u = 0;$$

ce qui place évidemment l'origine des axes sur un point de la courbe.

Si l'on avait

$$(4) \qquad A't^2 + B'ut + C'u^2 = 0,$$

cette équation représenterait le système des deux droites passant par l'origine des coordonnées; car en la résolvant par rapport à la variable t, on aurait

$$t = \left(\frac{-B' \pm \sqrt{B'^2 - 4A'C'}}{2A'}\right)u.$$

L'équation (2), qui appartient seulement à l'ellipse ou à l'hyperbole, selon que A' et B' sont ou ne sont pas affectés du même signe, devient, en la mettant sous une forme homogène,

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \\ \text{ou} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \end{array}\right\} \quad \text{ou bien} \quad \left\{\begin{array}{l} a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \\ b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \end{array}\right.$$

a et b désignant les demi-axes de ces courbes. Lorsque ces demi-axes sont égaux, l'ellipse devient un cercle, et la seconde courbe est une hyperbole *équilatère*.

Dans la même hypothèse, l'équation (3) qui comprend les trois courbes du second degré, se change, pour l'ellipse, en

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) = \frac{p}{2a}(2ax - x^2),$$

lorsque p désigne le paramètre, ou la double ordonnée qui passe par l'un des foyers; et pour l'hyperbole, en

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2ax) = \frac{p}{2a}(x^2 - 2ax).$$

Telles sont les équations de ces courbes rapportées à leurs sommets.

Nous accentuerons les lettres a et b, quand il s'agira des équations relatives aux diamètres conjugués.

L'équation de cette dernière courbe prend une forme très simple, quand les asymptotes sont prises pour les axes mêmes des coordonnées. En effet, on a dans ce cas

$$x'y' = M,$$

et l'on voit par là que pour que y' fût nulle, il faudrait que x' fût infinie. Ainsi les branches de l'hyperbole s'approchent sans cesse des asymptotes; mais elles ne les atteignent jamais.

Enfin, l'équation de la parabole, qui répond au cas où $C' = 0$ dans l'équation (3), est

$$y^2 = px,$$

p étant le paramètre.

On aurait encore une parabole dans l'équation

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{m} + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{n} = 1\,;$$

car en chassant la puissance $\frac{1}{2}$ pour n'avoir que des puissances entières, on parviendrait, par deux opérations successives, à une équation complète du second degré entre les variables x, y, et qui satisferait à la condition $4AC = B^2$, énoncée ci-dessus; mais alors la parabole serait rapportée à deux de ses tangentes, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer.

51. Les applications de l'analyse à la Mécanique et à l'Astronomie exigent souvent que l'on rapporte les courbes du second ordre à leurs coordonnées polaires. Par exemple, si dans l'équation de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2\,,$$

ou

$$y^2 + (1 - e^2)x^2 = a^2(1 - e^2),$$

$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ étant le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, on fait

$$x = ae + r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,,$$

pour transporter l'origine des coordonnées au foyer de cette courbe, situé du côté des x positives, il viendra

$$r^2\sin^2\varphi + (1 - e^2)\,(ae + r\cos\varphi)^2 = a^2(1 - e^2);$$

puis développant et faisant attention que $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, on aura, après les réductions,

$$r^2 + 2(1 - e^2)\,aer\cos\varphi - e^2r^2\cos^2\varphi = a^2(1 - e^2)^2\,,$$

ou bien

$$r^2 = [a(1 - e^2) - er\cos\varphi]^2.$$

Enfin, extrayant la racine carrée, et tirant la valeur de r,

on obtiendra l'équation polaire de l'ellipse, savoir :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi},$$

qu'on peut encore mettre sous cette forme

$$r = \frac{h(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi} = \frac{h\left(2 - \frac{h}{a}\right)}{1 + \left(\frac{h}{a} - 1\right)\cos \varphi},$$

en désignant par h la distance $a + ae$ du foyer au sommet de la courbe le plus éloigné de ce point.

L'équation polaire de la parabole se déduit, par une méthode semblable, de $y^2 = px$, en faisant dans celle-ci

$$x = \tfrac{1}{4}p + r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

En effet, on a d'abord

$$r^2 \sin^2 \varphi = \tfrac{1}{4}p^2 + rp \cos \varphi,$$

et ensuite

$$r^2 = (\tfrac{1}{2}p + r \cos \varphi)^2;$$

enfin

$$r = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - \cos \varphi} = \frac{h}{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi}.$$

Mais on obtient tout d'abord ce résultat, en faisant a infini dans la seconde valeur de r relative à l'ellipse; car alors la fraction $\frac{h}{a} = 0$, et l'on a seulement

$$r = \frac{2h}{1 - \cos \varphi} = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - \cos \varphi},$$

à cause de $h = \frac{1}{4}p$.

L'équation polaire de l'hyperbole est de même une conséquence de celle de l'ellipse. En effet, en supposant dans celle-ci a négatif, et e plus grand que l'unité, c'est-à-dire $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$, l'équation polaire de l'hyper-

bole est

$$r = -\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi};$$

résultat auquel conduirait d'ailleurs le calcul direct employé ci-dessus pour les deux autres courbes.

Méthode générale pour mener des tangentes aux courbes.

52. Parmi les diverses méthodes analytiques que l'on peut choisir pour résoudre le problème des tangentes, la suivante, qui a beaucoup d'analogie avec celle que M. Lacroix a exposée, est assez remarquable par sa simplicité.

[Fig. 29.] Soient α, β les coordonnées positives du point M; l'équation de la droite cherchée sera

$$(1) \qquad y - \beta = A(x - \alpha).$$

Pour rapporter les points de la courbe NN′ à des coordonnées polaires, et placer en même temps en N l'origine de ces coordonnées, on fera (n° 48),

$$x = x' + r\cos\varphi, \quad y = y' + r\sin\varphi,$$

ou pour abréger,

$$x = x' + rp, \quad y = y' + rq,$$

x' et y' désignant les coordonnées du point N commun à la courbe et à la sécante NN′.

Ces valeurs étant substituées dans l'équation

$$(2) \qquad y^2 = mx + nx^2$$

des courbes du second ordre, on aura

$$(y' + rq)^2 = m(x' + rp) + n(x' + rp)^2.$$

Si l'on développait cette équation, et qu'on ordonnât par rapport à r; il est évident que l'on obtiendrait un résultat de la forme suivante,

$$Mr^2 + Br + C = 0,$$

lequel se réduirait à

$$Mr + B = 0,$$

puisque C, qui est indépendant de r, a pour valeur $y'^2 - mx' - nx'^2$, comme il résulte du développement effectif de l'équation ci-dessus, et que cette valeur est nulle en vertu de la relation (2). Ainsi, en supposant que la partie $NN' = r$ de la droite MN' s'anéantisse, cette droite sera tangente à la courbe, et résoudra la question; donc alors

$$B = 0.$$

Telle est l'équation qui exprime la condition du contact. On peut donc, dans le développement dont il s'agit, n'avoir égard qu'aux termes multipliés par la première puissance de r; ainsi l'on a

$$B = 2y'q - mp - 2npx' = 0,$$

d'où

$$\frac{q}{p} = A = \frac{m + 2nx'}{2y'};$$

par conséquent l'équation (1) de la tangente devient

$$y - \beta = \frac{2nx' + m}{2y'}(x - \alpha). \qquad (T)$$

Si le point M était donné sur la courbe même, on aurait $\alpha = x'$ et $\beta = y'$, et pour lors l'équation précédente deviendrait, en ajoutant $mx' - mx'$ dans le second membre,

$$2yy' = x'(2nx + m) + mx \qquad (T')$$

Les mêmes considérations appliquées à l'équation des lignes du second ordre, dépourvue du rectangle des coordonnées, savoir :

$$Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex = 0,$$

conduiraient à cette équation symétrique de la tangente menée par un point (x', y') de la courbe,

$$(2Cx' + E)x + (2Ay' + D)y + Ex' + Dy' = 0.$$

Si cette droite passait par un point extérieur (α, β), son équation prendrait la forme

$$(2Cx' + E)\alpha + (2Ay' + D)\beta + Ex' + Dy' = 0,$$

ou

$$(2C\alpha + E)x' + (2A\beta + D)y' + E\alpha + D\beta = 0;$$

mais au point de contact, on a évidemment

$$Ay'^2 + Cx'^2 + Dy' + Ex' = 0;$$

il ne reste donc qu'à combiner entre elles ces deux dernières équations pour avoir les coordonnées x', y' de ce point.

Enfin, il n'est pas difficile de voir que si l'on prenait l'équation complète des courbes du second degré,

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F;$$

celle de la tangente menée par le point x', y', z', pris sur cette courbe, serait

$$(2Ay' + Bx' + D)y + (2Cx' + By' + E)x + Dy' + Ex' = 2F;$$

d'où il résulte cette règle de Mnémonique, très commode pour retrouver de suite cette équation de la tangente :

Écrivez deux fois de suite l'équation de la courbe l'une au-dessus de l'autre. Dans la première ligne, changez x^2 en $x'x$, y^2 en $y'y$, et le rectangle xy en $x'y$.

Dans la seconde ligne, changez x^2 en xx', y^2 en yy', et le rectangle xy en xy' ; de plus, mettez x', y', au lieu de x, y dans les termes linéaires restans; alors la somme de ces deux équations ainsi modifiées sera l'équation de la tangente.

53. Soit la parabole [Fig. 30] dont l'équation est.... $y'^2 = px'$; on a dans ce cas, $m = p$ et $n = 0$; ainsi l'équation de la tangente à cette courbe devient, en vertu de la dernière formule (T') ci-dessus,

$$2yy' = p(x' + x).$$

Lorsque l'on assujettit cette droite à passer par un point extérieur à la courbe, et dont les coordonnées positives sont α et β, il est évident que l'on a

$$2\beta y' = p(x' + \alpha);$$

mais si le point par lequel doit passer la tangente TM était situé dans l'angle YAT, l'abscisse α serait seule négative, et l'on aurait conséquemment

$$2\beta y' = p(x' - \alpha).$$

54. Une méthode absolument semblable à celle du n° 52, et appliquée à l'équation

$$y'^2 = m'x'^2 + n',$$

commune à l'ellipse et à l'hyperbole, en prenant leurs centres pour origine des coordonnées, conduirait à l'équation de la tangente rapportée à la même origine : aussi trouverait-on pour cette équation

$$y - \beta = \frac{m'x'}{y'}(x - \alpha);$$

mais lorsque le point donné est celui du contact, on a

$$\alpha = x', \quad \beta = y',$$

et pour lors ce résultat se change en cet autre

$$yy' = m'xx' + n',$$

après avoir ajouté du même côté $n' - n'$ et réduit.

55. Pour appliquer cette dernière formule à des cas particuliers, soit d'abord $y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2)$; alors on a $m' = -\frac{b^2}{a^2}$, $n' = b^2$, et la substitution de ces valeurs donne

$$(1) \qquad a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2.$$

Dans cette équation les coordonnées courantes de la

tangente sont x, y; ainsi en supposant que cette droite dût passer par un point M donné hors de la courbe, on changerait x en α et y en β, et l'on aurait pour équation de la tangente MT',

$$(2) \qquad a^2\beta y' + b^2\alpha x' = a^2b^2.$$

Mais comme par le point M on peut mener à l'ellipse deux tangentes MT', MT'', l'équation de la tangente MT'' serait, en désignant par x'', y'' les coordonnées du point de contact T'' supposé au-dessous de l'axe des x,

$$(2') \qquad b^2\alpha x'' - a^2\beta y'' = a^2b^2,$$

puisque l'ordonnée y'' située au-dessous de cet axe doit être prise négativement

Cela posé, la corde T'T'' menée par les points de contact des deux tangentes dont il s'agit, en tant qu'elle est assujettie à passer par le point T' ou par les deux points T', T'', a généralement pour équation

$$(3) \quad Y - y' = A(X - x') \quad \text{ou} \quad y' + y'' = A(x' - x''),$$

A étant un coefficient qu'il s'agit de déterminer. Or on tire des équations (2, 2')

$$a^2\beta(y' + y'') + b^2\alpha(x' - x'') = 0,$$

et

$$\frac{y' + y''}{x' - x''} = -\frac{b^2\alpha}{a^2\beta} = A.$$

Mettant cette valeur dans l'équation (3), il vient

$$a^2\beta Y + b^2\alpha X = a^2\beta y' + b^2\alpha x',$$

ou bien, à cause de la relation (2),

$$(4) \qquad a^2\beta Y + b^2\alpha X = a^2b^2.$$

Il suit de là que l'équation de la tangente MT' et celle de la corde T'T'' n'en forment, à proprement parler, qu'une seule. Il y a cependant cette différence remarquable, que dans (2) les coordonnées x', y' sont celles du point

de contact, tandis que dans (4), X, Y, désignent les coordonnées courantes.

Lorsqu'il s'agit du cercle dont l'équation est $x'^2+y'^2=r^2$, on a

$$b=a=r, \quad \text{ou} \quad m'=-1;$$

ainsi l'équation de la tangente devient

$$(5) \qquad xx'+yy'=r^2 \text{ ou } y=-\frac{x'}{y'}x+\frac{r'}{y'}.$$

Il suit de là que si les coordonnées du centre d'un autre cercle du rayon r' étaient désignées par α, β, et que par conséquent l'équation de ce cercle fût

$$(x''-\alpha)^2+(y''-\beta)^2=r'^2,$$

celle de sa tangente serait

$$(x-\alpha)(x''-\alpha)+(y-\beta)(y''-\beta)=r'^2,$$

ou

$$(6) \qquad y=-\left(\frac{x''-\alpha}{y''-\beta}\right)x+\frac{\alpha(x''-\alpha)+\beta(y''-\beta)+r'^2}{y''-\beta}.$$

Pour que ces deux courbes aient la même tangente, il faut que les équations (5, 6) soient identiques, c'est-à-dire que

$$\frac{x'}{y'}=\frac{x''-\alpha}{y''-\beta}, \quad \frac{r^2}{y'}=\frac{\alpha(x''-\alpha)+\beta(y''-\beta)+r'^2}{y''-\beta};$$

d'où l'on tire aisément

$$x''-\alpha=\frac{r'^2x'}{r^2-\alpha x'-\beta y'}, \quad y''-\beta=\frac{r'^2y'}{r^2-\alpha x'-\beta y'}.$$

Mais à cause de l'équation du second cercle et de celle du premier cercle, on a, après avoir substitué ces valeurs et réduit,

$$r'^2r^2=(r^2-\alpha x'-\beta y')^2;$$

puis après avoir extrait la racine carrée des deux membres, il vient

$$(7) \qquad \alpha x'+\beta y'=r(r-r'),$$

ou

$$\frac{\alpha x'}{y'} = \frac{r(r-r') - \beta y'}{y'},$$

valeur qui change l'équation (5) en celle-ci :

$$y = -\left[\frac{r(r-r') - \beta y'}{\alpha y'}\right]x + \frac{r^2}{y'}.$$

Telle est, en général, l'équation d'une tangente commune à deux cercles, et dont un des points de contact sur le cercle r a pour ordonnée y'. On caractérisera les tangentes que l'on considère, en attribuant un signe convenable à chacun des rayons r, r', qui ont été supposés tous deux positifs.

Lorsqu'on fait passer l'axe des x par le centre du second cercle, on a $\beta = 0$, et l'équation de la tangente prend cette forme;

$$y = \frac{\alpha r - (r-r')x}{\pm\sqrt{\alpha^2 - (r-r')^2}},$$

à cause de $y' = \pm\sqrt{r^2 - x'^2}$ et de l'équation (7) qui donne, dans la même circonstance,

$$x' = \frac{r(r-r')}{\alpha}.$$

Il est à remarquer que cette équation (7) est celle de la corde de contact des deux tangentes qu'il est possible de mener symétriquement aux deux cercles r, r'; mais alors x', y' doivent être considérées comme les coordonnées courantes d'un point quelconque de cette corde du cercle r.

56. Il est très important de remarquer que l'on parviendrait encore à des résultats tout-à-fait semblables à ceux des n^{os} précédens, relatifs aux tangentes, quand même l'axe des ordonnées, mené toujours tangentiellement à la courbe proposée ou parallèlement à l'un de ses diamètres conjugués, ne ferait pas un angle droit avec l'axe des abscisses ou l'autre diamètre. La raison est que les propriétés des courbes du second ordre sont les mêmes par

rapport à leurs diamètres que par rapport à leurs axes; mais dans ce cas le coefficient de x, dans l'équation générale de la tangente, ne doit plus être considéré comme une tangente trigonométrique (n° 41); c'est au contraire une droite menée parallèlement à l'axe des ordonnées par l'extrémité d'une abscisse constante prise pour unité, et terminée à la tangente à la courbe.

Voilà les préliminaires avec lesquels il est important de se familiariser, pour pouvoir comprendre les solutions ou les démonstrations des propositions qui vont suivre. Je ne m'arrêterai point à rappeler le grand nombre des propriétés fondamentales dont jouissent les lignes du second ordre, parce que le *Traité d'application de l'Algèbre à la Géométrie*, par M. Lacroix; l'*Essai de Géométrie analytique*, de M. Biot; la *Théorie des courbes*, par M. Boucharlat; enfin les *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, rédigées par M. Gergonne, ne laissent rien à désirer sur ce sujet.

CHAPITRE III.

Des Problèmes déterminés, et de quelques Théorèmes de Géométrie.

57. Lorsque toutes les conditions d'un problème sont exprimées par des équations, les inconnues se trouvent nécessairement liées entre elles par les relations qu'elles ont avec les quantités données. Alors s'il existe autant d'équations distinctes qu'il y a de quantités à découvrir, le problème n'est susceptible que d'un nombre limité de solutions, et en pareil cas il est dit *déterminé*. Telles sont les questions suivantes :

PROBLÈME.

Déterminer l'aire d'un triangle et d'un polygone rectilignes quelconques, en fonction des coordonnées des sommets de leurs angles.

1°. Soit le triangle AMM′ [fig. 10] ayant son sommet à l'origine des coordonnées rectangles, et désignons par xy, $x'y'$, les coordonnées des points M, M′. L'aire T de ce triangle a évidemment pour expression

$$T = \text{aire AMP} + \text{aire PMM'P'} - \text{aire AM'P'}.$$

Mais

$$\text{aire AMP} = \frac{xy}{2}, \quad \text{aire PMM'P'} = \frac{y+y'}{2}(x'-x),$$

$$\text{aire AP'M'} = \frac{x'y'}{2};$$

donc

$$T = \tfrac{1}{2}(x'y - xy').$$

2°. Représentons par $M_1M_2M_3M_4M_5$ les sommets des angles d'un pentagone quelconque, et par x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5, les coordonnées rectangles de ces points, tous situés dans l'angle des coordonnées positives; l'aire cherchée Σ sera évidemment égale à celle des deux trapèzes M_1P_5, M_5P_4, moins la somme des trois trapèzes M_1P_2, M_2P_3, M_5P_4, ou en style algébrique,

$$\begin{aligned}\Sigma = {} & \tfrac{1}{2}(y_1 + y_5)(x_5 - x_1) + \tfrac{1}{2}(y_5 + y_4)(x_4 - x_5) \\ & - \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) - \tfrac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) \\ & - \tfrac{1}{2}(y_3 + y_4)(x_4 - x_3);\end{aligned}$$

Mais en réduisant l'on a plus simplement

$$\begin{aligned}\Sigma = \tfrac{1}{2}[& (y_2 - y_5)x_1 + (y_5 - y_1)x_2 + (y_4 - y_2)x_3 \\ & + (y_5 - y_4)x_4 + (y_1 - y_4)x_5].\end{aligned}$$

Généralement, si n est le nombre des angles du polygone rectiligne, et que x_ny_n soient les coordonnées du point M_n, l'aire Σ_n de ce polygone sera donnée par la formule symétrique

$$\begin{aligned}\Sigma_n = \tfrac{1}{2}[& (y_2 - y_n)x_1 + (y_3 - y_1)x_2 + (y_4 - y_2)x_3 + \ldots \\ & + (y_1 - y_{n-1})x_n],\end{aligned}$$

dont la loi des termes est manifeste.

Problème.

58. *Trouver la relation qui existe entre la droite menée du sommet d'un triangle rectiligne sur le milieu de sa base et les trois côtés de ce triangle.*

[Fig. 31.] Soient

$$\begin{aligned} AB &= c, & AM &= c', & BM &= c'', \\ AP &= x, & PM &= y, & ME &= z.\end{aligned}$$

Les triangles rectangles APM, BPM, fourniront respectivement les équations

$$y^2 = c'^2 - x^2, \quad y^2 = c''^2 - (c - x)^2,$$

par le moyen desquelles on obtient

$$(1) \qquad x = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2c};$$

$$(2) \qquad y^2 = \frac{2c^2c'^2 + 2c^2c''^2 + 2c'^2c''^2 - c^4 - c'^4 - c''^4}{4c^2},$$

et par suite

$$\mathrm{BP} = \frac{c^2 + c''^2 - c'^2}{2c}.$$

Lorsque $c'' > c'$, AP est le plus petit segment, et l'on a

$$\mathrm{PE} = \mathrm{AE} - \mathrm{AP} = \frac{c''^2 - c'^2}{2c};$$

or, à cause de $\overline{\mathrm{EM}}^2 = \overline{\mathrm{PM}}^2 + \overline{\mathrm{PE}}^2$, on a, en employant les expressions algébriques,

$$z^2 = \frac{2c^2c'^2 + 2c^2c''^2 + 2c'^2c''^2 - c^4 - c'^4 - c''^4 + c'^4 - 2c'^2c''^2 + c''^4}{4c^2}.$$

Chassant le dénominateur et réduisant, il vient, pour la relation cherchée,

$$4z^2 = 2c'^2 + 2c''^2 - c^2,$$

ou bien

$$2z^2 + 2a^2 = a'^2 + a''^2,$$

en changeant c en $2a$, c' en a', et c'' en a''.

Cette proposition, qui est la quatorzième du troisième livre de la *Géométrie* de M. Legendre, pourrait être sans doute résolue plus brièvement, en partant, comme l'a fait ce savant géomètre, de la propriété du triangle obliquangle; mais nous avons préféré, dans cette circonstance, remonter à la propriété fondamentale du triangle rectangle, afin de faire directement usage des coordonnées rectangulaires.

L'analyse précédente mène à diverses conséquences remarquables. Par exemple, en écrivant l'équation (1) ainsi qu'il suit,

$$c^2 - 2cx = c''^2 - c'^2,$$

et décomposant ses deux membres en facteurs, il vient

$$c(c-2x)=(c''+c)\,(c''-c);$$

d'où résulte cette proportion

$$c : c''+c :: c''-c : c-2x,$$

c'est-à-dire que *la base est à la somme des deux autres côtés, comme la différence de ces mêmes côtés est à la différence des segmens formés par la perpendiculaire.*

Maintenant, si l'on multiplie par $\frac{1}{4}c^2$ les deux membres de l'équation (2), on aura, en faisant attention que $\frac{1}{4}y^2c^2$ est le carré de l'aire T du triangle ABC,

$$4T=\sqrt{2c^2c'^2+2c^2c''^2+2c'^2c''^2-c^4-c'^4-c''^4}.$$

D'un autre côté, à cause de

$$y^2=c'^2-x^2=c'^2-\left(\frac{c^2+c'^2-c''^2}{2c}\right)^2,$$

on trouvera, en décomposant en facteurs le second membre qui est formé de la différence de deux carrés,

$$y^2=\left(c'+\frac{c^2+c'^2-c''^2}{2c}\right)\left(c'-\frac{c^2+c'^2-c''^2}{2c}\right)$$

$$=\left[\frac{(c+c')^2-c''^2}{2c}\right]\left[\frac{c''^2-(c-c')^2}{2c}\right].$$

Effectuant la même décomposition dans le second membre de cette valeur, et désignant par p le demi-périmètre du triangle, on aura

$$\tfrac{1}{4}y^2=\frac{p(p-c')\,(p-c'')\,(p-c)}{c^2}.$$

Partant, l'aire d'un triangle rectiligne dont on connaît les trois côtés, a pour expression

$$T=\sqrt{p(p-c)\,(p-c')\,(p-c'')},$$

résultat déjà énoncé au n° 3, et auquel on parvient très aisément par les formules de la Trigonométrie rectiligne. (*Géodésie*, tom. I, p. 57.)

PROBLÈME.

59. *Étant données les trois lignes qui partent des angles d'un triangle rectiligne, et qui se terminent au milieu des côtés opposés, trouver l'expression analytique de ces côtés.*

[Fig. 32.] Soient

$$AB = 2c, \quad AC = 2c', \quad BC = 2c'',$$
$$CD = d, \quad BF = d', \quad AE = d''.$$

On aura par le problème précédent les trois équations

$$4c^2 + 4c'^2 = 2d''^2 + 2c''^2,$$
$$4c^2 + 4c''^2 = 2d'^2 + 2c'^2,$$
$$4c'^2 + 4c''^2 = 2d^2 + 2c^2,$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned} 2c^2 + 2c'^2 &= d''^2 + c''^2, \\ 2c^2 + 2c''^2 &= d'^2 + c'^2, \\ 2c'^2 + 2c''^2 &= d^2 + c^2. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Soustrayant la seconde de la première, puis la troisième de la première, puis la troisième de la seconde, et réduisant, on obtiendra ces trois autres équations

$$\left.\begin{aligned} 3c'^2 - 3c''^2 &= d''^2 - d'^2, \\ 3c^2 - 3c''^2 &= d''^2 - d^2, \\ 3c^2 - 3c'^2 &= d'^2 - d^2. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Comme l'une de celles-ci est une fonction des deux autres, il n'existe réellement que deux équations entre les inconnues c, c', c''; mais il n'en est pas de même lorsque l'on joint à ces dernières l'une des équations (A). En prenant, par exemple, la troisième divisée par deux, on a

$$c'^2 + c''^2 = \frac{c^2 + d^2}{2}.$$

Et en divisant par 3 la première des équations (B), il vient

$$c'^2 - c''^2 = \frac{d''^2 - d'^2}{3};$$

celle-ci étant combinée avec l'équation précédente, on a

$$c'^2 = \frac{3c^2 + 3d^2 - 2d'^2 + 2d''^2}{12},$$

$$c''^2 = \frac{3c^2 + 3d^2 - 2d''^2 + 2d'^2}{12}.$$

Maintenant si l'on substitue ces valeurs dans la troisième équation (B), on obtiendra, après les réductions nécessaires,

$$9c^2 = 2d'^2 + 2d''^2 - d^2;$$

et l'on voit d'abord que l'on a pareillement

$$9c'^2 = 2d^2 + 2d''^2 - d'^2,$$
$$9c''^2 = 2d^2 + 2d'^2 - d''^2.$$

Telles sont les équations desquelles on peut tirer les valeurs des côtés du triangle, soit par le calcul, soit par une construction géométrique (n° 68. L. C.).

THÉORÈME.

60. *Si des sommets des angles d'un triangle rectiligne quelconque, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés opposés, ces perpendiculaires se couperont toutes trois en un seul et même point.*

[Fig. 33.] Soient

$$AP = \alpha, \quad PM = \beta, \quad AP' = \alpha';$$

on aura

$$PP' = \alpha' - \alpha.$$

Première démonstration. 1°. L'équation de la droite AM, passant par l'origine des coordonnées rectangles, étant $y = \frac{\beta}{\alpha} x$, celle de la droite P'M'' qui lui est perpendi-

culaire, et qui est assujettie à passer par P′, sera (nos 39 et 42)

$$(1) \qquad y = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha').$$

2°. La droite P′M faisant avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique est $-\frac{\beta}{\alpha' - \alpha}$, la ligne AM′, qui est perpendiculaire à cette même droite, aura pour équation

$$(2) \qquad y = \frac{\alpha' - \alpha}{\beta} x.$$

Cela posé, si l'on attribue aux variables x, y, la même valeur dans les équations (1) et (2), elles représenteront les coordonnées du point m d'intersection des droites AM′, P′M″; ainsi, par le procédé ordinaire d'élimination, l'on trouvera que $x = \alpha$. L'abscisse du point m étant égale à celle du point M, il s'ensuit que les trois perpendiculaires PM, AM′, P′M″, se coupent au seul et même point m: il en serait de même si ces perpendiculaires se coupaient au-dehors du triangle proposé.

Voici une démonstration géométrique de ce théorème:

Seconde démonstration. En supposant, comme ci-dessus, que les droites BP, CQ [fig. 34] soient respectivement perpendiculaires aux côtés AC, AB, il s'agit de démontrer que AM est en même temps perpendiculaire à BC. Or les triangles rectangles APB, AQC ayant l'angle commun BAC, sont nécessairement semblables; par conséquent AE = AL, PE = PR, RQ = LQ.

Il résulte de là, et de ce que les triangles QAL, QAR sont rectangles, que les angles LAB, BAD sont égaux. D'ailleurs l'égalité des angles EAC, CAD entraînant celle des arcs CE, CD, il s'ensuit que les angles DAC, CBE sont aussi égaux. De plus, les angles ARP, BRM sont opposés par le sommet; donc les triangles RAP, BMR sont

équiangles. Mais l'angle RPA est droit ; donc l'angle BMR l'est aussi ; ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME.

61. *Si l'on mène à volonté une parallèle à la base d'un triangle, et que par les points où cette parallèle coupe les deux autres côtés, on tire des droites aux sommets des angles opposés, elles se couperont toujours sur un point de la droite qui joint le milieu de la base et le sommet du triangle.*

Première solution. [Fig. 35] Soient

$$Ap = \alpha, \quad Ap' = \alpha', \quad AP' = x',$$
$$pm = \beta, \quad p'm' = \beta, \quad P'M' = y',$$

et

$$AP = a;$$

on aura alors

$$pP = a - \alpha, \quad AB = \frac{a}{2}, \quad p'P = a - \alpha'.$$

En vertu de la notation actuelle, l'équation de la droite AM′ est

$$(1) \qquad y = \frac{\beta}{\alpha} x;$$

celle de la droite PM′

$$(2) \qquad y = -\frac{\beta}{a - \alpha'}(x - a);$$

celle de la droite Pm

$$(3) \qquad y = -\frac{\beta}{a - \alpha}(x - a);$$

et celle de la droite Am'

$$(4) \qquad y = \frac{\beta}{\alpha'} x.$$

Pour obtenir les coordonnées du point M′, on combi-

nera entre elles les équations (1) et (2), dans lesquelles on changera x en x', et y en y'; ce qui donnera

$$x' = \frac{a\alpha}{a - \alpha' + \alpha}, \quad y' = \frac{a\beta}{a - \alpha' + \alpha},$$

et par suite

$$BP' = AP' - AB = \frac{a(\alpha + \alpha' - a)}{2(\alpha - \alpha' + a)}.$$

D'un autre côté, la droite BM′ étant assujettie à passer par le point B, milieu de AP, et à faire avec celle-ci un angle dont la tangente est $\frac{P'M'}{BP'}$, son équation sera

$$(5) \qquad y = \frac{2\beta}{\alpha + \alpha' - a}(x - \tfrac{1}{2}a).$$

J'observe maintenant que pour que les droites proposées ne forment qu'une seule et même intersection, il faut qu'en ce point elles aient les mêmes coordonnées : le moyen de vérifier cette circonstance est donc de combiner deux à deux les équations des droites Pm, Am', BM′. On trouve en effet que (3) et (4) donnent en même temps que (4) et (5),

$$x = \frac{a\alpha'}{\alpha' - \alpha + a}, \quad y = \frac{a\beta}{\alpha' - \alpha + a}.$$

Donc les trois droites Pm, Am', BM′, sont douées de la propriété énoncée ci-dessus.

Deuxième solution. Ce théorème peut encore se démontrer à l'aide d'un principe fécond dans ses applications, lequel consiste en ce que si l'on combine les équations de deux lieux géométriques d'une manière quelconque, le troisième lieu géométrique résultant de cette combinaison, passera par les points d'intersection des deux autres : d'où il suit que si trois équations à deux ou trois variables s'accordent entre elles, il sera possible d'en combiner deux de

manière qu'il en résulte une quatrième équation identique à la troisième.

Soient, par exemple,

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + C = 0, \\ A'x + B'y + C' = 0, \\ A''x + B''y + C'' = 0, \end{array}\right\} \quad (6)$$

les équations de trois droites ayant même point d'intersection, et multiplions respectivement les deux premières par les indéterminées m, m'; la somme des produits sera

$$(Am + A'm')x + (Bm + B'm')y + Cm + C'm' = 0, \quad (7)$$

et représentera le système de toutes les droites qui passent par le point d'intersection des deux premières. La direction de l'une des droites de ce système dépendant essentiellement des valeurs qu'on attribuera aux quantités m, m', supposons qu'elle coïncide avec celle de la troisième droite (6); on aura alors

$$Am + A'm' = A'', \quad Bm + B'm' = B'', \quad Cm + C'm' = C'',$$

et en éliminant m, m' entre ces trois relations, il viendra l'équation de condition

$$(A'B'' - B'A'')C + (A''B - B''A)C' + (AB' - BA')C'' = 0, \quad (8)$$

laquelle doit avoir lieu lorsque les trois droites (6) concourent au même point. En effet, les équations (3, 4, 5) satisfaisant à cette dernière, la proposition énoncée se trouve, par ce fait, démontrée.

De là résulte naturellement cet autre théorème :

Si l'on divise en un même nombre de parties égales deux côtés d'un triangle, et que par les points de division l'on tire des droites aux angles opposés, celles qui se correspondent se couperont en des points qui seront situés sur la droite passant par le milieu de la base, et par le sommet de l'angle opposé. (Voyez la figure 36.)

On démontrerait aussi aisément que *les perpendiculaires*

élevées de tous ces points de division sur les côtés auxquels ils appartiennent, se coupent de deux en deux, en des points qui sont situés sur une certaine droite passant de même par le sommet du triangle.

PROBLÈME.

62. [Fig. 52.] *Inscrire dans un cercle donné un triangle* aa'a'' *dont les trois côtés passent respectivement par trois points* A, A', A'' *donnés sur le même plan.*

Soient $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$ les coordonnées rectangles des points donnés A, A', A''; et supposons que le triangle inscrit $aa'a''$ jouisse de la propriété énoncée. L'équation du cercle rapporté à son centre sera

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = r^2,$$

r étant le rayon : si donc $x'y'$ sont les coordonnées d'un point particulier a' pris sur cette circonférence, on aura également

$$(2) \qquad x'^2 + y'^2 = r^2,$$

et les droites Aa', A'a', assujetties chacune à passer par deux points, auront respectivement pour équations (n° 39),

$$(y - y')(x' - \alpha) - (y' - \beta)(x - x') = 0,$$
$$(y - y')(x' - \alpha') - (y' - \beta')(x - x') = 0.$$

Quelle que soit la manière dont on combine ces deux dernières équations, le résultat appartiendra à une ligne plane, dont quelques-uns des points seront communs au cercle (1). Par exemple, en les multipliant l'une par l'autre, il vient

$$\begin{aligned}&(y - y')^2 (x' - \alpha)(x' - \alpha') \\ &- (x - x')(y - y')[(x' - \alpha)(y' - \beta') + (x' - \alpha')(y' - \beta)] \\ &+ (x - x')^2 (y' - \beta)(y' - \beta') = 0; \qquad (3)\end{aligned}$$

c'est l'ensemble des deux droites que l'on considère, représenté par une équation du second degré (n° 50). Or, au

point d'intersection des courbes (1) et (3), les x, y ayant les mêmes valeurs, et les équations (1, 2) donnant en les soustrayant l'une de l'autre,

$$(y-y')(y+y')+(x-x')(x+x')=0,$$

il en résulte que l'équation (3) devient, en éliminant le facteur $(y-y')$, et effaçant ceux qui seront communs à tous les termes,

$$\begin{aligned}&(x+x')^2(x'-\alpha)(x'-\alpha')\\&+(x+x')(y+y')[(x'-\alpha)(y'-\beta')+(x'-\alpha')(y'-\beta)]\\&+(y+y')^2(y'-\beta)(y'-\beta')=0.\end{aligned}\qquad(4)$$

Toutes ces équations s'accordant entre elles aux points d'intersection, l'on pourra ajouter (3) et (4), et l'on aura, après avoir développé et réduit au moyen des relations (1, 2),

$$\begin{aligned}&r^2(r^2+xx'+yy'+\alpha x'+\beta\beta')\\&+(xy'+yx')(\alpha\beta'+\alpha'\beta)+(xx'-yy')(\alpha\alpha'-\beta\beta')\\&-r^2(\alpha+\alpha')x-r^2(\beta+\beta')y\\&-r^2(\alpha+\alpha')x'-r^2(\beta+\beta')y'=0;\end{aligned}$$

expression qu'on peut mettre sous cette forme très symétrique,

$$\begin{aligned}(5)\qquad&(r^2-xx'-yy')(r^2-\alpha\alpha'-\beta\beta')\\&=(r^2-\alpha x'-\beta y')(r^2-\alpha' x-\beta' y)\\&+(r^2-\alpha' x'-\beta' y')(r^2-\alpha x-\beta y),\end{aligned}$$

et qui représente l'équation de la corde $\alpha\alpha''$, puisqu'elle a nécessairement deux points communs avec le cercle (1). Mais cette corde devant passer par le point A'', il faudra, avant de combiner son équation avec celle (2) du cercle, pour avoir les coordonnées $x'y'$ du point α', y faire $x=\alpha''$, $y=\beta''$; ainsi on aura

$$\begin{aligned}(5')\quad(r^2-\alpha''x'-\beta''y')&=\frac{(r^2-\alpha x'-\beta y')}{(r^2-\alpha\alpha'-\beta\beta')}(r^2-\alpha''\alpha'-\beta''\beta')\\&+\frac{(r^2-\alpha' x'-\beta' y')}{(r^2-\alpha'\alpha-\beta'\beta)}(r^2-\alpha''\alpha-\beta''\beta).\end{aligned}$$

Cette équation est susceptible d'être écrite beaucoup plus simplement, parce que chaque facteur est une fonction explicite d'une perpendiculaire à l'une des tangentes AT, A″T′, A″T″. En effet, soient p, p', p'' les perpendiculaires abaissées du point a' supposé connu, sur ces tangentes dont les équations sont (n° 55),

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= r^2 \text{ pour AT,} \\ \alpha' x + \beta' y &= r^2 \text{ pour A′T′,} \\ \alpha'' x + \beta'' y &= r^2 \text{ pour A″T″;} \end{aligned}$$

on aura (n° 43),

$$\begin{aligned} p\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} &= \alpha x' + \beta y' - r^2, \\ p'\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2} &= \alpha' x' + \beta' y' - r^2, \\ p''\sqrt{\alpha''^2 + \beta''^2} &= \alpha'' x' + \beta'' y' - r^2; \end{aligned}$$

et si l'on désigne par D, E les perpendiculaires abaissées de A sur A′T′ et A″T″; par D′, E′ les perpendiculaires abaissées de A′ sur AT et A″T″, l'équation (5′) se changera en celle-ci :

$$(6) \qquad p'' = \frac{E'}{D'} p + \frac{E}{D} p'.$$

Pour trouver une autre équation entre les inconnues p, p', p'', on remarquera que les trois tangentes dont il s'agit, déterminent, par leur mutuelle rencontre, le triangle MM′M″ dont l'aire est évidemment égale à celle des deux triangles a'M′M″, a'M″M moins l'aire triangulaire aM′M. Par conséquent, si m, m', m'' sont les côtés opposés aux angles M, M′, M″ du triangle MM′M″, et que $\frac{m''h}{2}$ soit sa surface, on aura cette autre relation,

$$(7) \qquad p'' = \frac{m}{m''} p + \frac{m'}{m''} p' - h.$$

De ces deux valeurs de p'', on conclut par soustraction,

$$(8) \qquad p\left(\frac{m}{m''}-\frac{E'}{D'}\right)+p'\left(\frac{m'}{m''}-\frac{E}{D}\right)=h;$$

équation linéaire en p et p', et qui donne nécessairement lieu à une droite passant par M″ et coupant le cercle donné au point a' cherché.

La solution serait absolument la même, si au cercle donné on substituait une courbe quelconque du second ordre; et c'est sous ce point de vue plus général que M. Lamé, ingénieur des mines, a considéré la question (*). Telle que nous venons de la traiter, elle présente des difficultés qui ont fixé l'attention de plusieurs grands géomètres; mais Carnot imitant la mise en équation de Lagrange, a donné dans sa Géométrie de position, page 384, une solution analytique de ce problème, très différente de celle qui précède, et applicable à un polygone inscrit d'un nombre quelconque de côtés.

PROBLÈME.

63. *Connaissant les rayons des cercles inscrit et circonscrit à un triangle, ainsi que sa hauteur, déterminer ce triangle.*

Soient x, y, z, les trois côtés inconnus du triangle; h sa hauteur donnée; p la moitié de son périmètre; r et R les rayons des cercles inscrit et circonscrit; enfin s l'aire du triangle proposé.

On aura ces quatre équations (n° 3),

$$(1) \quad R=\frac{xyz}{4s}, \quad (2) \quad r=\frac{2s}{x+y+z},$$

$$(3) \quad s=\frac{xh}{2}, \quad (4) \quad s=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)},$$

(*) *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie.* Paris, 1818.

esquelles on déduira facilement l'expression de la base x, par la méthode d'élimination suivante.

Si l'on introduit dans les équations (1), (2), (4), au lieu de s sa valeur donnée par l'équation (3), on aura

$$(1') \quad 2h\mathrm{R} = yz, \qquad (2') \quad \frac{x+y+z}{2} = \frac{xh}{2r} = p,$$

$$(4') \quad \frac{xh}{2} = \sqrt{\frac{xh}{2r}\left(\frac{xh}{2r}-x\right)\left(\frac{xh}{2r}-y\right)\left(\frac{xh}{2r}-z\right)}.$$

Élevant cette dernière au carré, il viendra, après avoir divisé tout par x^2h et chassé les dénominateurs,

$$4r^4h = (h-2r)\,(xh-2yr)\,(xh-2zr);$$

développant le second membre, remplaçant yz par sa valeur (1′) et divisant par h, on aura

$$4r^4 = x^2h^2 - 2xhr(x+y+z) + 4xr^2(y+z) + 8hr^2\mathrm{R} - 16r^3\mathrm{R};$$

substituant en outre pour $(x+y+z)$ et $(y+z)$ leurs valeurs déduites de l'équation (2′) et réduisant, on obtiendra une équation de laquelle on tirera

$$x = \frac{2r\sqrt{2h\mathrm{R} - 4r\mathrm{R} - r^2}}{h-2r}.$$

Passons maintenant à la construction de cette valeur.

[Fig. 37.] On prendra, sur le diamètre AE du cercle circonscrit, la partie $\mathrm{AH} = h - 2r$; et après avoir élevé à ce diamètre la perpendiculaire HK, on décrira sur AK comme nouveau diamètre la demi-circonférence AHFK; ensuite on mènera du point K la corde $\mathrm{KF} = r$; puis la droite indéfinie AFG; et lorsqu'on aura pris $\mathrm{AM} = 2r$, on mènera MG parallèle à la corde FH. Par ce moyen, l'on aura $\mathrm{AG} = x$, ainsi qu'il est aisé de le prouver.

Il suit de là qu'en inscrivant dans le cercle ACB une corde $\mathrm{AB} = \mathrm{AG}$, sa parallèle PC menée à une distance $\mathrm{BP} = h$, coupera la circonférence ACB en deux points

C, C′, qui pourront chacun être pris à volonté pour le sommet du triangle.

Bossut, qui a résolu le même problème par une méthode toute différente de la précédente, fait voir que si l'on cherchait le segment AD formé par la hauteur CD du triangle ACB, on aurait, pour le déterminer, à résoudre une équation du 4e degré. (Voyez son *Application de l'Algèbre à la Géométrie*); ce qui vient à l'appui de cette règle énoncée par Newton dans son *Arithmétique universelle*, que, pour parvenir à une équation finale qui soit la moins élevée possible, il faut choisir pour inconnue celle qui, parmi toutes les solutions dont le problème est susceptible, éprouve le moindre nombre de variations.

Notez bien que si l'on cherchait les valeurs des rayons des cercles qui touchent extérieurement les côtés d'un triangle, on les trouverait, comme celle du rayon du cercle inscrit employée dans la solution précédente, fonction de l'aire de ce triangle; de là il serait aisé de démontrer ce théorème : *Le carré de la surface d'un triangle est égal au produit des quatre rayons des cercles tangens à trois des côtés de ce triangle.*

THÉORÈME.

64. *Si quatre cercles touchent chacun, intérieurement ou extérieurement, trois côtés d'un quadrilatère plan quelconque, les centres de ces cercles seront toujours sur une même circonférence.* [Fig. 38.]

Cette proposition curieuse et nouvelle est du genre de celles pour la démonstration desquelles il est préférable d'employer la considération immédiate des angles. En effet, si l'on suppose que les quatre cercles touchent extérieurement les côtés du quadrilatère, et qu'on ait mené des droites d'un centre à l'autre, droites qui diviseront chacune en deux parties égales les angles supplémentaires de

ce quadrilatère, il suffira de prouver que le nouveau quadrilatère OO′O″O‴ est inscriptible au cercle, c'est-à-dire que la somme de deux de ses angles opposés est égale à deux angles droits. Or, on a

$$\text{l'angle OAD} = 1^{\text{Q}} - \frac{A}{2}, \quad \text{l'angle ODA} = 1^{\text{Q}} - \frac{D}{2};$$

par conséquent

$$\text{l'angle O} = \frac{A + D}{2}.$$

Par la même raison

$$\text{l'angle O}'' = \frac{B + C}{2};$$

donc

$$O + O'' = \frac{A + B + C + D}{2};$$

mais

$$A + B + C + D = 4^{\text{Q}},$$

donc

$$O + O'' = 2^{\text{Q}}.$$

Voilà ce qu'il fallait prouver.

On démontrerait, avec la même facilité, cet autre théorème :

Si les côtés d'un quadrilatère circonscrit touchent la circonférence aux sommets mêmes des angles d'un quadrilatère inscrit, leurs diagonales se couperont toutes au même point.

Il ne serait pas difficile de s'assurer en outre que cette propriété se vérifie également pour l'ellipse. C'est ce que les jeunes lecteurs feront bien de démontrer eux-mêmes; car rien n'est plus satisfaisant que de ne devoir à personne la découverte des moyens à employer dans la recherche des vérités mathématiques.

PROBLÈME.

65. [Fig. 39.] *Les côtés du triangle* M′M″D *étant connus de grandeur, et les coordonnées rectangles des points* M′M″, *étant donnés, trouver celles du point* D.

Soient

$$M'M'' = c, \quad M'D = c', \quad M''D = c'',$$

et appelons xy, $x'y'$, $x''y''$, les cordonnées rectangles des points DM′M″, on aura (n° 47)

$$c'^2 = x'^2 + y'^2 + x^2 + y^2 - 2xx' - 2yy',$$
$$c''^2 = x''^2 + y''^2 + x^2 + y^2 - 2xx'' - 2yy'';$$

puis après avoir soustrait ces deux équations l'une de l'autre et réduit,

$$(1) \quad c''^2 - c'^2 = x''^2 - x'^2 + y''^2 - y'^2 - 2x(x'' - x') - 2y(y'' - y').$$

D'ailleurs, il est aisé de voir, d'après le n° 57, que l'aire T du triangle DA′A″, exprimée en fonction des coordonnées des sommets, est

$$(2) \qquad T = \frac{x(y' - y'') + y(x'' - x') + x'y'' - y'x''}{2};$$

et que puisque les trois côtés de ce triangle sont connus, l'on a (n° 58)

$$T = \pm\sqrt{\left(\frac{c + c' + c''}{2}\right)\left(\frac{c' + c'' - c}{2}\right)\left(\frac{c + c'' - c'}{2}\right)\left(\frac{c + c' - c''}{2}\right)};$$

prenant le signe supérieur lorsque le point D est au-dessus de la droite M′M″, et le signe inférieur dans le cas contraire.

De ces deux équations (1, 2) du premier degré, écrites ainsi qu'il suit :

$$(1') \qquad 2x(x'' - x') + 2y(y'' - y') = A,$$
$$(2') \qquad 2x(y' - y'') + 2y(x'' - x') = B,$$

et dans lesquelles

$$A = x''^2 - x'^2 + y''^2 - y'^2 + c'^2 - c''^2,$$
$$B = 4T + 2(x''y' - y''x');$$

on tire par le procédé d'élimination ordinaire

$$2x = \frac{A(x'' - x') - B(y'' - y')}{c^2},$$
$$2y = \frac{B(x'' - x') + A(y'' - y')}{c^2}.$$

Si l'on connaissait les distances du point D à trois autres M′, M″, M‴, rapportés à leurs axes rectangles, il suffirait de combiner l'équation (1) avec son analogue

$$c'''^2 - c'^2 = x'''^2 - x'^2 + y'''^2 - y'^2 - 2x(x''' - x') - 2y(y''' - y'),$$

pour en déduire les valeurs de x et y.

Ces deux solutions analytiques peuvent être employées avec succès, toutes les fois qu'il s'agit de projeter sur une carte topographique des points secondaires dont on a les distances à d'autres points déjà placés sur cette carte, d'après le système de projection adopté.

THÉORÈMES.

66 *Dans tout quadrilatère plan inscrit au cercle,*

1°. *Le rectangle des diagonales est égal à la somme des rectangles des côtés opposés;*

2°. *Les deux diagonales sont entre elles comme la somme des rectangles des côtés qui aboutissent à leurs extrémités.*

[Fig 18.] Soient a, b, c, d, les côtés consécutifs AB, BC, CD, AD, du quadrilatère inscrit ABCD; z, z', les diagonales AC, BD; et représentons par (a, b) l'angle ABC; alors l'angle des deux côtés c, d, sera $2^{\text{Q}} - (a, b)$, en vertu de la propriété de ce quadrilatère; et en traduisant analytiquement celle des triangles ABC, ADC, on aura (n° 3)

$$\left.\begin{aligned} z^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(a, b) \\ z'^2 &= c^2 + d^2 + 2cd\cos(a, b) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

de là

$$\left.\begin{aligned}\cos(a, b) &= \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\\ \sin(a, b) &= \sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)^2}\end{aligned}\right\}. \quad (2)$$

Maintenant, si de la première valeur de z^2 on élimine $\cos(a, b)$, dont l'expression est (2), ensuite que l'on réduise et que l'on décompose en facteurs, on trouvera

$$z^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}.$$

Relativement à l'autre diagonale z', on aura pareillement

$$z'^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}.$$

Multipliant et divisant ces deux équations l'une par l'autre, puis extrayant la racine carrée, il viendra, conformément à l'énoncé des deux théorèmes,

$$zz' = ac+bd,$$
$$\frac{z}{z'} = \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

Passons aux conséquences qui dérivent de cette analyse. D'abord de ce que

$$\cos(a, b) = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)},$$

et $$\tang^2 \tfrac{1}{2}(a, b) = \frac{1-\cos(a, b)}{1+\cos(a, b)},$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\tang^2 \tfrac{1}{2}(a, b) &= \frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2-(c-d)^2}\\ &= \frac{(c+d+b-a)(c+d+a-b)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)};\end{aligned}$$

ou bien, désignant par p le demi-périmètre du quadrilatère,

on a enfin

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a, b) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}.$$

Maintenant si S et S′ désignent les surfaces des deux triangles ABC, ADC, dont se compose le quadrilatère, et qui ont pour base commune la diagonale z, on aura

$$\begin{aligned} \textit{aire du quadril. insc.} &= S + S' \\ &= \frac{ab}{2}\sin(a, b) + \frac{cd}{2}\sin[2^{\text{Q}} - (a, b)] \\ &= \frac{ab + cd}{2}\sin(a, b). \end{aligned}$$

Remplaçant $\sin(a, b)$ par sa valeur (2), on aura

$$\begin{aligned} S + S' &= \tfrac{1}{4}\sqrt{4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2} \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)\left(\frac{a+b+d-c}{2}\right)\left(\frac{c+d+a-b}{2}\right)\left(\frac{c+d+b-a}{2}\right)}; \end{aligned}$$

ou bien faisant, comme ci-dessus, $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$,

on aura définitivement

$$S + S' = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

expression très symétrique de l'aire du quadrilatère inscrit.

On pourrait désirer en outre de connaître en fonction des quatre côtés du quadrilatère inscrit, l'angle de deux côtés opposés et celui des deux diagonales. Cette nouvelle question, traitée à la page 314 du tome XIII des *Annales de Mathématiques*, se résout fort simplement, ainsi qu'il suit :

Les prolongemens des côtés b, d, se rencontrant au-delà de c, en supposant $a > c$, ils forment avec le côté a un triangle dans lequel on a nécessairement

$$\text{angle}\,(b, d) = 2^{\text{Q}} - [(a, d) + (a, b)];$$

et par suite

$$\sin(b, d) = \sin(a, d)\cos(a, b) + \sin(a, b)\cos(a, d).$$

Mais par ce qui précède, on a

$$\sin(a, d) = \frac{\sqrt{\text{ABCD}}}{2(ad+bc)}, \quad \sin(a, b) = \frac{\sqrt{\text{ABCD}}}{2(ab+cd)},$$

$$\cos(a, d) = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}, \quad \cos(a, b) = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)};$$

lorsque pour abréger l'on fait

$$b+c+d-a = \text{A}, \quad d+a+b-c = \text{C},$$
$$c+d+a-b = \text{B}, \quad a+b+c-d = \text{D}.$$

Substituant donc ces valeurs dans celle de $\sin(b, d)$, il vient

$$\sin(b, d) = \frac{(a^2-c^2)\sqrt{\text{ABCD}}}{2(ad+bc)(ab+cd)};$$

pareillement

$$\sin(a, c) = \frac{(b^2-d^2)\sqrt{\text{ABCD}}}{2(ad+bc)(ab+cd)}.$$

Il n'est pas difficile de voir que l'on a en outre

$$\cos(b, d) = \sin(a, b)\sin(a, d) - \cos(a, b)\cos(a, d),$$

et par substitution,

$$\cos(b, d) = \frac{\text{ABCD} - (a^2+b^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2-d^2)}{4(ab+cd)(ad+bc)};$$

ou bien en éliminant A, B, C, D, et réduisant,

$$\cos(b, d) = \frac{(ab+cd)^2 + (ad+bc)^2 - (a^2-c^2)^2}{2(ab+cd)(ad+bc)}.$$

Mettant cette valeur dans la relation

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}(b, d) = 1 - \cos(b, d),$$

on parvient enfin à cette expression,

$$\sin\tfrac{1}{2}(b, d) = \frac{a-c}{2}\sqrt{\frac{\text{BD}}{(ab+cd)(ad+bc)}}.$$

et à cause de $\cos\frac{1}{2}(b, d) = \frac{\sin(b, d)}{2\sin\frac{1}{2}(b, d)}$, on a

$$\cos\tfrac{1}{2}(b, d) = \frac{a+c}{2}\sqrt{\frac{AC}{(ab+cd)(ad+bc)}},$$

et, de plus,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b, d) = \frac{a-c}{a+c}\sqrt{\frac{BD}{AC}}.$$

Telles sont les expressions nouvelles données par les auteurs de la solution citée. Il ne reste plus qu'à déterminer, ainsi qu'ils l'ont fait, l'angle (z, z') des deux diagonales : or, l'aire du quadrilatère inscrit étant égal à

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{ABCD} = \tfrac{1}{2}zz'\sin(z, z'),$$

on a

$$\sin(z, z') = \frac{\sqrt{ABCD}}{2zz'} = \frac{\sqrt{ABCD}}{2(ac+bd)};$$

d'ailleurs, $\cos(z, z')^2 = 1 - \sin^2(z, z')$; partant,

$$\cos(z, z') = \frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}.$$

De ces deux valeurs, on déduit naturellement ces trois autres,

$$\sin\tfrac{1}{2}(z, z') = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{AC}{ac+bd}},\ \cos\tfrac{1}{2}(z, z') = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{BD}{ac+bd}},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(z, z') = \sqrt{\frac{AC}{BD}}.$$

Voici, pour terminer, l'énoncé d'un théorème de M. Hachette, relatif aux quadrilatères inscrits.

Si tant de quadrilatères qu'on voudra, inscrits à un même cercle, ont un côté commun, les droites qui, dans ces quadrilatères, joindront l'intersection des diagonales et le point de concours des côtés adjacens au côté commun, iront toutes concourir en un même point de la perpendiculaire sur le milieu de ce côté commun. (Voyez la fig. 42 *bis*.)

Nota. Les propriétés du quadrilatère sphérique inscrit à un petit cercle de la sphère, s'obtiendraient en partant des résultats analytiques donnés au commencement de ce numéro; mais les recherches de cette nature nous engageraient dans des calculs trop compliqués pour cet Ouvrage. *Voyez* d'ailleurs les *Annales de Mathém.*, tome XII, p. 273, où l'on démontre entre autres choses que *dans tout quadrilatère sphérique inscrit, la somme de deux angles opposés, bien que variable, est cependant égale à la somme des deux autres angles.*

PROBLÈME.

67. *Un angle aigu d'un triangle rectangle étant donné, trouver la position de l'hypoténuse, de manière que ce triangle soit équivalent à un carré donné.*

[Fig. 40.] Soient q^2 le carré donné, a la tangente de l'angle connu APD, et α l'inconnue AP.

La droite DP devant être assujettie à passer par un point P pris sur l'axe des abscissés AX, son équation est

$$y = -a(x - \alpha).$$

Or, en faisant $x = 0$, on a pour l'ordonnée AD correspondante, $y = a\alpha$.

L'aire du triangle ADP étant $\frac{\text{AD} \times \text{AP}}{2} = \frac{a\alpha^2}{2}$, il s'ensuit que $q^2 = \frac{a\alpha^2}{2}$, et que par conséquent

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{2q^2}{a}}.$$

Si la valeur positive de α est représentée par AP, et sa valeur négative par Ap, les triangles APD, ApD, satisferont aux deux solutions du problème proposé.

PROBLÈME.

68. [Fig. 41.] *Par un point* M *donné de position à l'égard d'un angle connu* M'AN, *tirer une droite* MN, *de manière que l'espace triangulaire* AM'N *soit équivalent à un carré donné.*

Soient α, β les coordonnées rectangles du point M; A l'origine, q^2 le carré donné; a la tangente de l'angle M'AN; les inconnues P'M' $= y$ et AN $= \alpha'$. On aura

$$PN = \alpha' - \alpha.$$

L'équation de la droite M'A est

$$y = ax,$$

celle de la droite MN, censée assujettie à passer par le point N, est

$$y = \frac{-\beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha').$$

Lorsque les coordonnées de ces droites seront communes, elles représenteront celles du point M' de leur intersection; ainsi l'on aura

$$y = \frac{a\alpha'\beta}{a(\alpha' - \alpha) + \beta}.$$

Mais l'aire du triangle AM'N est

$$\frac{\alpha' y}{2} = q^2,$$

et si l'on substitue dans cette expression la valeur de y, on aura

$$\frac{a\alpha'^2\beta}{a(\alpha' - \alpha) + \beta} = 2q^2,$$

ou bien

$$(1) \qquad a\alpha'^2\beta = 2q^2 a\alpha' - 2q^2 a\alpha + 2q^2\beta.$$

Si l'on tirait de cette équation la valeur de α' on aurait

un second point N de la ligne cherchée, et alors le problème serait résolu; mais comme la formule qu'il faudrait construire ou calculer pour cet effet est un peu compliquée, il sera utile de la simplifier au moyen de la considération suivante.

Puisque pour tous points M′ de la droite AM′ on a

$$\frac{y}{x} = a;$$

soit

$$a = \frac{\beta}{n}:$$

dans ce cas la quantité n exprimera la partie A′P interceptée entre la perpendiculaire PM et la ligne A′M menée parallèlement à AM′; et si l'on désigne par d l'intervalle AA′, on aura AP, ou $\alpha = n - d$. Ces valeurs de a et α étant substituées dans l'équation (1), on trouvera, lorsque les réductions qui se présentent d'abord seront effectuées,

$$\alpha'^2\beta = 2q^2\alpha' + 2q^2d;$$

d'où l'on tire

$$\alpha' = \frac{q^2}{\beta} \pm \sqrt{\frac{2q^2d}{\beta} + \frac{q^4}{\beta^2}};$$

ou autrement, pour la facilité de la construction,

$$\alpha' = \frac{q^2}{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{\beta} + 2d\right)\frac{q^2}{\beta}}.$$

Sur une ligne indéfinie PQ, élevez la perpendiculaire AC $= \beta$; prenez CO $=$ CM $= q$; et après avoir tiré AM, menez-lui par le point O la parallèle ON, qui détermine CN pour la valeur de $\frac{q^2}{\beta}$, comme cela est évident par la théorie des lignes proportionnelles. Soit maintenant.... $\frac{q^2}{\beta} = m$, la valeur de α' se changera en

$$m + \sqrt{(m + 2d)m}.$$

Or, comme la partie radicale exprime une moyenne proportionnelle, on prendra $CQ = 2d$, et sur NQ comme diamètre, on décrira une demi-circonférence NVQ; la corde NV sera, par l'effet de cette construction, égale à $\sqrt{(m + 2d)m}$. Ainsi faisant $PN = NV$, on aura

$$PC = \alpha'.$$

Quant à la seconde valeur de α', il faut faire attention qu'elle satisfait au cas où l'on voudrait mener la droite MN dans l'angle $A'Am$; et il peut arriver en outre que d soit du côté des x positives, ou que β soit négative; toutes ces diverses circonstances du problème produisent, dans les constructions, des changemens dont il est facile de se rendre raison.

Nous observerons encore que la solution précédente convient naturellement au problème où l'on se propose de mener, par un point donné, une ligne droite qui divise une figure rectiligne quelconque en deux parties qui soient entre elles dans un rapport connu; mais dorénavant, nous n'insisterons pas trop sur la manière de lire dans une formule algébrique toutes les conséquences et les constructions qui en dérivent, afin de réserver quelque chose à l'intelligence des élèves.

Voici deux autres problèmes qui ont beaucoup d'analogie avec le précédent, et dont les solutions reposent sur la considération des coordonnées obliques.

PROBLÈME.

69. [Fig. 41.] *Par un point* M′ *donné dans un angle connu* MA′N, *mener une droite, de manière que le produit des segmens* A′M, AN, *soit égal à un carré* q^2.

Soient α, β les coordonnées obliques A′A, AM′ du point M′; A′ leur origine, et $A'N = x'$.

Si l'on considère que la droite M'N doit passer par le point N, son équation sera généralement de la forme $y = M(x - x')$, M n'étant plus une tangente trigonométrique, mais le rapport de AM' à AN (n° 41); ainsi, pour le cas dont il s'agit, on a

$$M = \frac{\beta}{\alpha - x'},$$

et l'équation de la droite M'N devient

$$y = \frac{\beta}{\alpha - x'}(x - x').$$

Comme A'M répond à $x = 0$, on a

$$y = \frac{\beta x'}{x' - \alpha};$$

multipliant cette valeur par x', il viendra

$$\frac{\beta x'^2}{x' - \alpha} = q^2,$$

et de là

$$x' = \frac{1}{2}\left[\frac{q^2}{\beta} \pm \sqrt{\frac{q^2}{\beta}\left(\frac{q^2}{\beta} - 4\alpha\right)}\right],$$

valeur que l'on construira par la méthode du n° précédent.

PROBLÈME.

70. *Par un point donné dans un angle donné, et également distant de ses deux côtés, mener une droite terminée aux deux côtés de l'angle, de manière que ce point la divise en deux segmens, dont la somme des carrés soit équivalente à une surface donnée.*

[Fig. 72.] Prenons les côtés AX, AY de l'angle donné YAX pour les axes des coordonnées obliques, et supposons que du point M également distant de ces axes, on ait mené l'une des quatre droites qui satisfont à la question, par

exemple, la droite RMR′. Le point M ayant pour coordonnées $AP = \alpha$, $PM = \alpha$, la droite RR′, qui le contient, aura généralement pour équation,

$$Y - \alpha = M(x - \alpha).$$

Si donc AR et AR′ sont respectivement désignés par x et y, on aura, en faisant successivement Y et $X = 0$,

$$(m)\quad \begin{cases} x - \alpha = -\dfrac{\alpha}{M}, & \text{ou} \quad x = -\dfrac{\alpha(1 - M)}{M}, \\ y - \alpha = -\alpha M, & \text{ou} \quad y = \alpha(1 - M). \end{cases}$$

Soient $MR = z$, $MR' = z'$, et angle $R'AR = A$; on aura (n° 3),

$$z^2 = (x - \alpha)^2 + \alpha^2 - 2(x - \alpha)\alpha \cos A,$$
$$z'^2 = (y - \alpha)^2 + \alpha^2 - 2(y - \alpha)\alpha \cos A;$$

et puisque la somme des carrés de ces deux segmens doit être équivalente au carré q^2, on a nécessairement

$$(1)\qquad z^2 + z'^2 = q^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 + 2\alpha^2 - 2\alpha[(x - \alpha) + (y - \alpha)]\cos A.$$

D'un autre côté, à cause que les trois points R, M, R′ sont en ligne droite, on a évidemment

$$\frac{x - \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha}{y - \alpha},$$

ou bien

$$(2)\qquad (x - \alpha)(y - \alpha) = \alpha^2.$$

Mais faisons, pour abréger, $x - \alpha = x'$, et $y - \alpha = y'$, et éliminons α^2 de l'équation (1); on aura

$$(1')\qquad (x' + y')^2 - 2\alpha(x' + y')\cos A = q^2;$$

équation de laquelle on tire

$$(1'')\qquad x' + y' = \alpha \cos A \pm \sqrt{q^2 + (\alpha \cos A)^2};$$

d'ailleurs, on a par ce qui précède,

$$(2')\qquad x'y' = \alpha^2.$$

Ainsi, l'on connaît maintenant la somme et le produit des deux inconnues x', y'. Au lieu de former l'équation du second degré dont ces inconnues seraient les racines, on peut encore opérer comme il suit.

D'abord, pour construire la double valeur de $x' + y'$, soit menée MQ parallèlement à AX, et soit abaissée sur cet axe la perpendiculaire QE; on aura alors $AE = \alpha \cos A$. Ensuite, si l'on prolonge EQ de manière que $ED = q$, et qu'on décrive du point A comme centre, avec le rayon AD le demi-cercle BDB', on aura

$$\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 = (\alpha \cos A)^2 + q^2;$$

partant,

$$EB = \sqrt{q^2 + (\alpha \cos A)^2} + \alpha \cos A,$$

$$EB' = \sqrt{q^2 + (\alpha \cos A)^2} - \alpha \cos A;$$

et si l'on fait $x' + y' = t$, on aura

$$t = EB, \text{ ou } t = EB'.$$

Il est remarquable qu'à cause des équations (m), qui donnent

$$x' + y' = t = -\alpha\left(M + \frac{1}{M}\right)$$

l'équation (1') devient

$$\alpha^2\left(M + \frac{1}{M}\right)^2 + 2\alpha^2\left(M + \frac{1}{M}\right)\cos A = q^2;$$

puis développant et chassant les dénominateurs, on parvient à l'équation réciproque du quatrième degré,

$$\alpha^2 M^4 + 2\alpha^2 M^3 \cos A + 2\left(\alpha^2 - \tfrac{1}{2} q^2\right) M^2 + 2\alpha^2 M \cos A + \alpha^2 = 0,$$

dont la résolution ne comporte par conséquent que la difficulté de celle du second degré. (*Algèb.* de M. Lacroix, complément, p. 114). Or, de ce que $t = -\alpha\left(M + \frac{1}{M}\right)$, on a

$$M = \frac{-t \pm \sqrt{t^2 - 4a^2}}{2a};$$

et par suite,

$$y = a(1 - M) = \frac{2a + t \mp \sqrt{t^2 - 4a^2}}{2};$$

quantité facile à construire, et qui résout le problème.

Dans cette équation, t étant susceptible de deux valeurs, il est évident que y en aura en général quatre. En effet, le problème proposé offre visiblement quatre solutions; mais comme la figure est symétrique par rapport à la droite AM, il suffira d'obtenir deux solutions distinctes pour avoir les deux autres.

Ce problème est un de ceux qui furent proposés en 1819 au concours général des colléges royaux de Paris. (*Voyez les Annal. de Math.*, tome X, p. 73.)

PROBLÈME.

71. *Par un point* E [fig. 53] *pris dans le plan d'un cercle* C *du rayon* r, *mener deux droites rectangulaires, dont les parties interceptées* MM′, mm′ *par la circonférence, soient entre elles dans le rapport donné* μ.

Prenons d'abord pour origine des axes rectangles le centre C du cercle, et pour axe des x le diamètre qui passe par le point donné E, dont l'abscisse $= a$; rapportons ensuite le point M de la circonférence à des coordonnées polaires, telles que EM $= \rho$ soit le rayon vecteur, et φ soit l'angle que ce rayon fait avec l'axe des x.

L'équation du cercle, exprimée en coordonnées rectangles, sera

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

et à cause de $x = a + \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, on aura en coordonnées polaires

$$(a + \rho \cos \varphi)^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi = r^2;$$

d'où l'on tire aisément

$$\rho = -\alpha \cos \varphi \pm \sqrt{r^2 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}.$$

Soit ρ_1 la valeur de ρ relative au signe supérieur, et ρ_2 celle relative au signe inférieur; on aura

$$\rho_1 = \mathrm{EM} = -\alpha \cos \varphi + \sqrt{r^2 - \alpha^2 \sin^2 \varphi},$$
$$\rho_2 = \mathrm{EM}' = -\alpha \cos \varphi - \sqrt{r^2 - \alpha^2 \sin^2 \varphi},$$

et corde

$$\mathrm{MM}' = \rho_1 + \rho_2 = \mathrm{K} = 2\sqrt{r^2 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}.$$

Pour une autre corde $mm' = \mathrm{K}'$ qui passerait également par le point E, et qui ferait avec l'axe des x un angle φ', on aurait pareillement

$$\mathrm{K}' = 2\sqrt{r^2 - \alpha^2 \sin^2 \varphi'};$$

mais puisque ces deux cordes doivent être orthogonales, on a alors $\varphi' = \varphi + 100^{\mathrm{G}}$, et par suite,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{K} &= 2\sqrt{r^2 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}, \\ \mathrm{K}' &= 2\sqrt{r^2 - \alpha^2 \cos^2 \varphi}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Maintenant, si l'on ajoute les carrés de ces deux expressions et qu'on réduise, on aura cette relation remarquable,

$$\mathrm{K}^2 + \mathrm{K}'^2 = 8r^2 - 4\alpha^2,$$

qui est indépendante de l'angle φ.

Mais d'après l'énoncé du problème,

$$\mathrm{K} = \mu \mathrm{K}';$$

concluons de là que

$$\mathrm{K}' = \sqrt{\frac{8r^2 - 4\alpha^2}{1 + \mu^2}}, \quad \mathrm{K} = \mu \sqrt{\frac{8r^2 - 4\alpha^2}{1 + \mu^2}}.$$

Les cordes K, K' étant connues de longueur, il ne s'agira

plus, pour avoir leurs directions, que de tirer la valeur de φ de l'une des équations (1), laquelle sera donnée par cette expression,

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{4r^2 - K^2}{4\alpha^2}} = \sqrt{\frac{r^2(1-\mu^2) + \alpha^2\mu^2}{\alpha^2(1+\mu^2)}};$$

quantité radicale facile à construire, après y avoir rétabli l'homogénéité (n° 72).

Observons cependant qu'il est un moyen fort simple d'obtenir l'angle φ' lorsque la corde K′ est connue de longueur. Pour avoir d'abord cette corde, on mènera par le point donné E le diamètre AB et la corde DF perpendiculaire à ce diamètre; puis ayant mené BH parallèle et égale à DF, on tirera la droite AH dont la valeur sera, d'après ce qui a été démontré ci-dessus, $= \sqrt{8r^2 - 4\alpha^2} = l$; ensuite, sur AB et BH, on prendra deux parties BG, BR, qui soient entre elles dans le rapport donné $\frac{p}{q} = \mu$, et la droite GR aura pour valeur $\sqrt{p^2 + q^2} = q\sqrt{1+\mu^2} = m$. Enfin, à cause de $K' = \sqrt{\frac{8r^2 - 4\alpha^2}{1+\mu^2}} = q\frac{l}{m}$, il ne restera plus qu'à chercher une quatrième proportionnelle aux lignes m, l, q, pour avoir K′.

Pour achever la construction, soit pris quelque part sur la circonférence du cercle donné un arc AA′ dont la corde $=$ K′, et du centre C soit décrit, du rayon CE, l'arc EE′, qui coupera en E′ la corde AA′, de telle sorte que le rayon CE′ fera avec cette corde l'angle $A'E'C = \varphi'$, ainsi que cela est évident, puisqu'à cause de l'uniformité de courbure du cercle, $E'A' = Em$, $E'A = Em'$.

Il est inutile de faire remarquer que la valeur de K′ prise négativement, serait insignifiante, mais que l'angle φ' peut être positif ou négatif, parce que le problème admet deux solutions effectives.

PROBLÈME.

72. [Fig. 42.] *Un cercle d'un rayon connu, et une ligne* CB *étant donnés de position par rapport à deux axes fixes, mener au cercle une tangente* TM *qui soit en même temps parallèle à* CB.

Soient r le rayon du cercle, a la tangente trigonométrique de l'angle BCA, α la distance inconnue AT, et x, y, les coordonnées du point de contact.

La ligne MT devant être parallèle à BC, l'angle MTA sera nécessairement égal à l'angle BCA; ainsi, par le problème des tangentes (n° 55), on a

$$a = \frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}}, \qquad (1)$$

comme il est facile de s'en assurer. En effet,

$$a = \frac{\text{PM}}{\text{PT}} = -\frac{x}{y}, \qquad (2)$$

puisque l'équation de la tangente TM est (n° 55),

$$\beta y + \alpha x = r^2;$$

or, lorsque $\beta = 0$, elle se réduit à

$$\alpha x = r^2, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{r^2}{\alpha};$$

d'ailleurs l'équation du cercle donne

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

donc

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

ou bien éliminant x par le moyen de sa valeur précédente,

$$y = \frac{r}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - r^2};$$

ainsi, substituant pour x et y leurs valeurs dans l'équa-

tion (2), l'on obtient l'équation (1); et cette dernière étant résolue par rapport à α, donne, pour la solution cherchée,

$$\alpha = \frac{r\sqrt{a^2+1}}{a},$$

ou autrement en désignant l'unité par m, afin de rendre les termes homogènes (n° 68, *L. C.*),

$$\alpha = \frac{r\sqrt{a^2+m^2}}{a}.$$

Pour construire cette quantité, on abaissera du point A sur la droite BC la perpendiculaire AB, et l'on mènera par l'extrémité M du rayon AM la tangente MT, qui jouira de la propriété énoncée. En effet, CB étant prise pour m, et l'angle ABC étant droit par construction, la ligne AB représentera la tangente de l'angle BCA. De plus, à cause des parallèles CB, MT, on aura cette proportion... ..... AB : AM :: CA : AT, ou en termes algébriques,

$$a : r :: \sqrt{a^2+m^2} : \alpha = \frac{r\sqrt{a^2+m^2}}{a}.$$

Il ne faut pas croire que cette solution soit particulière au problème proposé; car si la courbe donnée était une parabole, par exemple (toutes choses égales d'ailleurs), et que l'on voulût trouver les valeurs des coordonnées du point de contact, on combinerait de même l'équation $y'^2 = px'$ de cette courbe avec celle-ci :

$$\frac{p}{2y'} = a,$$

qui exprime (n° 54) la tangente trigonométrique de l'angle formé par la tangente à la courbe et l'axe des abscisses, et l'on aurait

$$x' = \frac{p}{4a^2}, \qquad y' = \frac{p}{2a}.$$

Ainsi, l'abscisse serait à l'ordonnée correspondante, comme le rayon des tables est au double de la tangente donnée.

PROBLÈME.

73. *Mener une tangente commune à deux cercles donnés de grandeur et de position.* [Fig. 43.]

Quoique nous ayons déjà résolu ce problème au n° 55, nous allons le traiter différemment, afin de prouver qu'il est possible de varier les solutions, sans pour cela leur ôter le caractère analytique.

Soient $AA' = \delta$, r le rayon du cercle AM, r' le rayon du cercle A'M', α la distance inconnue AT, et a la tangente trigonométrique de l'angle MTA.

Il résulte du problème précédent, et de ce que M'T doit toucher les deux cercles donnés, que pour le cercle AM,

$$a = \frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}},$$

et que pour le cercle A'M',

$$a = \frac{r'}{\sqrt{(\alpha + \delta)^2 - r'^2}}.$$

Égalant ces deux valeurs, et faisant disparaître les radicaux, il vient

$$\frac{r^2}{\alpha^2 - r^2} = \frac{r'^2}{(\alpha + \delta)^2 - r'^2}.$$

Chassant les dénominateurs, on trouve, après la réduction,

$$r^2 (\alpha + \delta)^2 = \alpha^2 r'^2.$$

Extrayant la racine carrée des deux membres, on a

$$\alpha r + \delta r = \pm \alpha r',$$

et enfin

$$\alpha = \frac{\delta r}{\pm r' - r}; \qquad (1)$$

ce qui indique, à cause du signe ambigu $\pm$, que par deux points différens, on peut mener une tangente commune à deux cercles. D'un autre côté, puisque la valeur de a est affectée d'un radical du second degré, il est clair qu'il est possible de mener, par un même point, deux tangentes à un cercle; donc le problème est susceptible de quatre solutions (*). Ces conséquences sont entièrement d'accord avec celles qui se déduiraient de l'équation de la tangente commune aux deux cercles, donnée au n° 55.

Nous avons fait dépendre le problème actuel de celui qui précède; mais l'un et l'autre ne sont que des cas particuliers d'une question plus étendue, traitée dans l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie* de M. Lacroix, n° 109. Comme il convient de s'attacher de préférence aux solutions générales, nous passerons à l'analyse du problème suivant :

(*) Pour faire voir, par un nouvel exemple, que l'emploi des coordonnées obliques simplifie souvent les calculs, nous résoudrons de rechef le présent problème.

On sait (n° 108, *L. C.*) que les rayons AM, AM′ menés aux points de contact M, M′ de la tangente TM, sont parallèles entre eux; ainsi, en vertu de cette propriété, l'équation aux coordonnées obliques AX, AY de cette tangente est (n°s 39 et 41),

$$y - r' = -\frac{r' - r}{\delta}(x + \delta),$$

puisque d'ailleurs les coordonnées du point M′ sont $-\delta$ et $+r'$. Faisant ici $y = 0$, on aura comme ci-dessus,

$$\text{AT ou } x = \frac{\delta r}{r' - r}. \qquad (1$$

Une solution analogue par les coordonnées rectangulaires serait bien moins simple, ainsi qu'on peut le vérifier.

PROBLÈME.

74. *Deux cercles étant donnés de grandeur et de position, mener une droite à travers, de manière que les parties interceptées soient égales entre elles et à une ligne donnée* m.

[Fig. 44.] Soient

$$\left.\begin{matrix} r, \\ r', \end{matrix}\right\} \text{ les rayons des cercles donnés } \left\{\begin{matrix} \text{C}, \\ \text{C}'. \end{matrix}\right.$$

Faisons en outre $CC' = \delta$, $C'A = \alpha$, et désignons par a la tangente de l'angle CAB''.

Pour remplir le but que nous nous sommes proposé à la fin du n° précédent, nous reprendrons l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle A, obtenue dans le n° 109 de l'ouvrage cité de M. Lacroix, et nous y ferons toutefois les changemèns que nécessite notre notation. Ainsi, par rapport au cercle C, on a, pour la valeur de la tangente CAB'',

$$a = \frac{\sqrt{4r^2 - m^2}}{\sqrt{4(\alpha + \delta)^2 - 4r^2 + m^2}},$$

et par rapport au cercle C', cette même tangente a pour expression

$$a = \frac{\sqrt{4r'^2 - m^2}}{\sqrt{4\alpha^2 - 4r'^2 + m^2}}.$$

Égalant ces deux valeurs délivrées de leurs radicaux, divisant tout par 4, et faisant pour abréger $r^2 - \frac{m^2}{4} = h^2$, $r'^2 - \frac{m^2}{4} = h'^2$, on aura

$$\frac{h^2}{(\alpha + \delta)^2 - h^2} = \frac{h'^2}{\alpha^2 - h'^2}.$$

Chassant les dénominateurs, et réduisant, on trouve

$$h'^2(\alpha + \delta)^2 = \alpha^2 h^2.$$

Extrayant la racine carrée de part et d'autre, on obtient

$$\alpha h' + \delta h' = \pm \alpha h;$$

d'où l'on tire enfin

$$\alpha = \frac{\delta h'}{\pm h - h'}. \qquad (1)$$

Cette formule, considérée seulement par rapport au signe supérieur, peut se construire de la manière suivante :

Sur les rayons CB, C'B' des cercles donnés, décrivez des demi-circonférences; par les points B, B', menez les cordes BD, B'D' égales entre elles et à la moitié de la droite m donnée; et tirez les cordes CD, C'D', qui seront les grandeurs respectives de h et de h'.

Menez ensuite CP parallèle à C'D'; prenez $Cq = h$, et par les points q, D', menez jusques en A la droite qD'A; le point A sera celui par lequel devra être menée la sécante proposée.

Enfin, sur C'A comme diamètre, décrivez une demi-circonférence. Portez C'D' de C' en d, et tirez la droite indéfinie Ad qui sera telle, que ses parties interceptées dans les cercles, seront égales entre elles et à la ligne donnée m.

Mais il est à propos de remarquer que, puisque la valeur de α ci-dessus est composée de la même manière que dans le n° précédent, il sera tout aussi simple de décrire respectivement des centres C, C' et avec des rayons h, h', des cercles concentriques à ceux CB, C'B', et ensuite de mener des tangentes communes à ces mêmes cercles, parce que ces droites seront en même temps les sécantes demandées.

Lorsque $m = 0$, les quantités h et h' acquièrent respectivement les valeurs r et r', et pour lors l'équation (1) devient

$$\alpha = \frac{\delta r'}{\pm r - r'},$$

laquelle rentre évidemment dans celles du n° précédent, en changeant r en r', *et vice versâ.*

L'expression

$$a = \frac{\sqrt{4r'^2 - m^2}}{\sqrt{4\alpha^2 - 4r'^2 + m^2}},$$

sur laquelle la solution ci-dessus est fondée, prend une nouvelle forme lorsque $\alpha = r'$; pour ce cas, qui répond à celui où il s'agit de mener par l'extrémité du diamètre d'un cercle connu une corde d'une grandeur donnée m, on a

$$a = \frac{\sqrt{4r'^2 - m^2}}{m};$$

d'où

$$m = \frac{2r'}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

De là il est facile de démontrer analytiquement le théorème suivant, considéré dans un de ses cas particuliers.

THÉORÈME.

75. [Fig. 45.] *Si par le sommet commun de deux courbes semblables du second degré, dont les grands axes coïncident, on mène à volonté deux droites* AB, AB′ *qui coupent ces courbes, les cordes* AB, AB′ *seront coupées en parties proportionnelles par la plus petite courbe, et par conséquent les lignes* BB′, DD′ *seront parallèles.*

Désignons par

$$M, M', m, m' \Big\} \text{ les cordes } \Big\{ AB, AB', AD, AD',$$

et fixons au point A l'origine des axes rectangulaires.

Si les équations de deux courbes du second ordre sont

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = px + qx^2, \\ y^2 = p'x + qx^2, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

ces courbes sont nécessairement semblables. Cette vérité est une suite de ce que l'on a alors, pour l'ellipse comme pour l'hyperbole, $\frac{b^2}{a^2} = \frac{b'^2}{a'^2}$; a, b et a', b' étant respectivement les demi-axes de ces mêmes courbes. La similitude dont il s'agit se manifeste donc lorsque les coefficiens de x^2 seulement sont égaux, et puisque pour le cas de la parabole on a $q = 0$, il s'ensuit que les paraboles sont toujours des figures semblables.

Cela posé, soient

$$y = \mathrm{A}x, \qquad y = \mathrm{A}'x, \qquad (2)$$

les équations des droites AB, AB′ passant par l'origine. En les combinant convenablement avec chacune des équations (1), pour avoir les coordonnées des points d'intersection, on parviendra aisément à

$$\mathrm{M} = \frac{p}{\mathrm{A}^2 - q}\sqrt{\mathrm{A}^2 + 1}, \quad \mathrm{M}' = \frac{p}{\mathrm{A}'^2 - q}\sqrt{\mathrm{A}'^2 + 1},$$

$$m = \frac{p'}{\mathrm{A}^2 - q}\sqrt{\mathrm{A}^2 + 1}, \quad m' = \frac{p'}{\mathrm{A}'^2 - q}\sqrt{\mathrm{A}'^2 + 1};$$

d'où l'on conclut sur-le-champ

$$\frac{\mathrm{M}}{m} = \frac{p}{p'} = \frac{\mathrm{M}'}{m'};$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ce théorème appliqué aux cercles, conduit à une solution fort élégante du problème suivant :

Deux points étant donnés de position à l'égard d'un cercle connu, décrire un nouveau cercle qui soit tangent au premier, et qui passe par les deux points donnés. Sur quoi l'on peut consulter les *Récréations mathématiques* d'Ozanam, nouvelle édition par Montucla, tome I, page 377.

Ce serait encore à l'aide de ce même théorème que l'on résoudrait cet autre problème :

Décrire un cercle tangent à deux cercles donnés, et qui passe par un point donné. Voyez le n° 6 de la *Correspondance* sur l'École Polytechnique.

THÉORÈME.

76. [Fig. 46.] *Soient* CA, CA′ *deux ellipses semblables;* C *leur centre commun;* AB, A′B′ *leurs grands ou leurs petits axes;* AM *une perpendiculaire à l'axe* AB; AK *une corde de la petite ellipse, faisant un angle quelconque avec* AX; MK′ *une corde de la grande ellipse, parallèle à* AK; MK″ *une autre corde menée de manière que l'angle* K″MY *soit égal à l'angle* K′MY′; *il s'agit de prouver que* MK′ + MK″ = 2AK.

1re *Démonstration.* Soient AK $= z$, MK′ $= z'$, MK″ $= z''$; désignons par a, b les demi-axes de la petite ellipse; par A, B ceux de la grande ellipse, et prenons respectivement les équations

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= px + qx^2, \\ y^2 &= p'x + qx^2, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

pour celles de ces deux ellipses semblables (n° 75), en supposant que, pour chacune, l'origine des coordonnées rectangles soit à son sommet.

Si φ est l'angle que z fait avec AX, on aura

$$x = z\cos\varphi, \qquad y = z\sin\varphi,$$

ou simplement

$$x = zm, \qquad y = zn;$$

ainsi la première équation (1) devient

$$z^2n^2 = pzm + qz^2m^2$$

et donne

$$z = \frac{pm}{n^2 - qm^2}.$$

Pour transporter l'origine des axes du point A′ au point M, sans toutefois changer leurs directions, soit $AA' = \alpha$, $MA = \beta$; la deuxième équation (1) deviendra, à cause de $x = \alpha + x'$, $y = \beta + y'$;

$$(y' + \beta)^2 = p'(x' + \alpha) + q(x' + \alpha)^2;$$

mais le point M étant sur la circonférence de l'ellipse A′C, on a entre α et β la relation

$$\beta^2 = p'\alpha + q\alpha^2;$$

de là l'équation précédente se réduit à

$$y'^2 + 2\beta y' = p'x' + qx'^2 + 2\alpha q x';$$

et comme $x' = z'm$, $y' = z'n$, puisque z' et z sont parallèles, il s'ensuit que l'on aura

$$z'^2 n^2 + 2\beta z' n = p'z'm + 2\alpha q z' m + q z'^2 m^2;$$

par conséquent

$$z' = \frac{(p' + 2\alpha q)m - 2\beta n}{n^2 - qm^2}.$$

Maintenant l'on remarquera que l'expression de z'' dérive de celle de z', en y faisant simplement n ou $\sin\varphi$ négatif; en effet, l'angle K″MY′ est négatif par suite de l'hypothèse établie ci-dessus. On a donc

$$z'' = \frac{(p' + 2\alpha q)m + 2\beta n}{n^2 - qm^2};$$

de là

$$z' + z'' = \frac{2(p' + 2\alpha q)m}{n^2 - qm^2}.$$

Or, les ellipses étant semblables et concentriques, fournissent $p = \frac{2b^2}{a}$, $p' = \frac{2B^2}{A}$, $q = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{B^2}{A^2}$, et

$\alpha = A - a$; la valeur précédente de $z' + z''$ se change donc en celle-ci :

$$z' + z'' = \frac{2\left(2a\,\frac{B^2}{A^2}\right)m}{n^2 - qm^2} = \frac{2pm}{n^2 - qm^2},$$

donc

$$z' + z'' = 2z, \qquad \text{C.Q F.D.}$$

Cette conséquence aurait encore lieu pour deux hyperboles semblables, puisque p et p' seraient négatifs, tandis que q serait positif; mais elle ne se vérifierait que pour deux paraboles égales et situées comme le sont les ellipses AC, A'C.

Ce théorème est énoncé dans la *Théorie de la figure de la Terre*, par Clairaut, page 158, et sert de base à la recherche de la figure des planètes, lorsque leurs parties sont supposées homogènes. Ce grand géomètre a employé la considération de la projection orthogonale, afin de prouver que si ce théorème est vrai pour deux cercles concentriques, il l'est aussi pour deux ellipses concentriques et semblables; mais notre démonstration plus directe a toute la généralité que l'on peut désirer. En voici une autre purement géométrique.

2e *Démonstration*. Supposons que AS et SK soient tangentes à la petite ellipse, AS étant d'ailleurs perpendiculaire à l'axe AB. La ligne CS divisera nécessairement AK en deux parties égales; car on sait par la théorie de cette courbe (n° 160, *L. C.*), que les tangentes menées par les extrémités d'une même corde, se rencontrent sur le prolongement du diamètre; SC coïncide donc avec ce diamètre. D'un autre côté, puisque la corde MK' est parallèle à AK par construction, et que les deux ellipses sont semblables, la droite SC divise aussi MK' en deux parties égales au point N'; donc la tangente SK passe par l'extrémité K' de la corde MK'. Par la même raison, si par le point M on tire la corde *mk''* parallèlement à AK, la ligne SK passera

pareillement par l'extrémité k'' de cette corde. Concluons de là que $Mmk''K'$ est un trapèze. Or $Am = AM$, et $mk'' = MK''$; donc comme ci-dessus, $MK'' + MK' = 2AK$.

PROBLÈME.

77. *Un cercle étant donné de grandeur et de position dans un angle connu, trouver le centre d'un cercle qui touche à la fois les côtés de l'angle et le cercle donné.* [Fig. 47.]

Soient α et β les coordonnées rectangles du point M situé sur la droite AM; x' et y' les coordonnées du centre M′ du cercle cherché; r le rayon ND du cercle connu; $b = PN$ l'ordonnée du centre de ce cercle; et $AN = B$.

Le cercle P′C devant être tangent aux côtés AC, AC, son centre sera situé sur la droite AM qui divise l'angle CAX en deux parties égales; et les centres M′, N, et le point de contact D seront en ligne droite. Or, entre les coordonnées des points M, M′ qui sont sur la même droite AM, on aura cette relation :

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{ou} \quad \alpha y' = x'\beta. \qquad \text{(A)}$$

De plus, entre la distance M′N des centres et les coordonnées de ses extrémités, on aura cette autre relation :

$$(r + y')^2 = (b - y')^2 + (\alpha - x')^2; \qquad \text{(B)}$$

développant celle-ci, réduisant et substituant pour y' sa valeur $\frac{x'\beta}{\alpha}$ tirée de la première équation, il viendra, à cause de $B^2 = \alpha^2 + b^2$,

$$r^2 + \frac{2x'\beta r}{\alpha} = B^2 - \frac{2b\beta x'}{\alpha} + x'^2 - \frac{2\alpha^2 x'}{\alpha};$$

d'où l'on tire, en résolvant, par rapport à x',

$$x' = \alpha + \beta\frac{(b+r)}{\alpha} \pm \sqrt{\left[\alpha + \beta\left(\frac{b+r}{\alpha}\right)\right]^2 - (B^2 - r^2)}.$$

Cette quantité est susceptible d'une construction très simple et très élégante. En effet, prenez $AQ = b + r$, et l'ordonnée QR aura pour expression analytique, $\beta \frac{(b+r)}{\alpha}$; portez RQ de P en R', et AR' représentera la quantité rationnelle; menez au cercle donné la tangente AT, qui sera égale à $\sqrt{B^2 - r^2}$, puisque $\overline{AT}^2 = \overline{AN}^2 - \overline{NT}^2$; prolongez indéfiniment NT, et faites $AS = AR'$; la quantité radicale sera représentée par TS. Enfin, prenez $SV = AS$, et $SV' = ST$; les parties TV, VV' seront les deux valeurs de x'. La première partie répondant au cas où le cercle donné est entre l'origine et le cercle à décrire; et la seconde, au cas où le cercle à décrire est entre le cercle donné et l'origine.

Si l'on construisait les équations (A) et (B), dont l'une appartient à une droite et l'autre à une parabole, les coordonnées des points d'intersection de ces deux lignes seraient à la fois les deux valeurs de x' et de y'.

PROBLÈME.

78. *Diviser un trapèze entre deux parties égales par une ligne parallèle aux deux bases.*

[Fig. 48.] Soient

$AB = b$, $BD = h$, $AC = h'$, $AP = x$, $PM = y$.

L'équation de la droite CD étant

$$Y = \frac{h - h'}{b} X + h',$$

on a entre les coordonnées du point M la relation

$$y = \frac{h - h'}{b} x + h';$$

et puisque l'aire du trapèze

$$ABCD = \frac{h + h'}{2} b,$$

que celle du trapèze

$$\text{APMC} = \frac{(h-h')x + 2bh'}{2b}x,$$

on en conclura

$$[(h-h')x + 2bh']x = \frac{(h+h')b^2}{2},$$

ou bien

$$2(h-h')x^2 + 4bh'x = (h+h')b^2; \qquad \text{(A)}$$

d'où l'on tire

$$x = -\frac{bh'}{h-h'} \pm \sqrt{\left(\frac{h+h'}{2} + \frac{h'^2}{h-h'}\right)\frac{b^2}{h-h'}}. \qquad \text{(B)}$$

On conçoit que cette formule doit se simplifier beaucoup, lorsque l'une des bases, h' par exemple, est nulle. En effet, pour le cas du triangle

$$x = \pm\sqrt{\frac{b^2}{2}};$$

mais lorsque $h = h'$, on ne peut rien conclure de l'équation (B) dans l'état où elle est présentement; alors on effectuera la réduction de l'équation (A), ou bien l'on procédera ainsi qu'il suit :

Changez h en $h' + q$ dans la formule (B), elle deviendra

$$x = \frac{-bh' \pm b\sqrt{\frac{1}{2}(2h'q + q^2 + 2h'^2)}}{q};$$

développez le radical par rapport aux puissances ascendantes de q, ce qui s'effectue par la formule du binome, ou plus commodément par la méthode des coefficiens indéterminés, et l'on aura cette série,

$$x = \frac{b}{2} + \frac{bq}{8h'} + \ldots\ldots$$

Lorsque $h' = h$, on a $q = 0$, et alors tous les termes de

cette série, excepté le premier $\frac{b}{2}$, s'anéantissent; d'où il suit que $x = \frac{b}{2}$, comme on devait bien s'y attendre. *Voyez*, pour acquérir une plus ample connaissance de ce procédé d'analyse, le *Traité élémentaire de Calcul différentiel*, par M. Lacroix, 3e édit., n° 94.

Rien ne serait plus aisé que de généraliser ce problème.

PROBLÈME.

79. *Diviser un triangle scalène en quatre parties égales, par deux lignes qui se coupent à angles droits.*

[Fig. 49.] Soient $AB = a$, α et β les coordonnées du sommet C du triangle donné, $BN = z$, $AN' = z'$; on aura

$$AN = a - z;$$

et soit $BD = a - \alpha = c$, on aura

$$\text{aire } ACB = \frac{a\beta}{2}.$$

La droite AC aura pour équation

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x, \qquad (1)$$

la droite CB, $$y = \frac{-\beta}{c}(x - a), \qquad (2)$$

la droite NH, $$y = A(x - a + z), \qquad (3)$$

la droite N'H', $$y = \frac{-1}{A}(x - z'). \qquad (4)$$

Si l'on combine les équations (2), (3), il en résultera, pour l'ordonnée du point H,

$$y = Hh = \frac{A\beta z}{Ac + \beta},$$

et à cause que l'aire du triangle NHB $= \frac{ACB}{2} = \frac{\alpha\beta}{4}$, on aura

$$\frac{A\beta z^2}{Ac + \beta} = \frac{\alpha\beta}{4};$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{\alpha\beta}{2z^2 - \alpha c}. \qquad (T)$$

Si l'on combine de même les équations (1) et (4), on obtiendra, pour l'ordonnée du point H',

$$y = H'h' = \frac{\beta z'}{A\beta + \alpha};$$

et parce que l'aire du triangle A'N'H' $= \frac{ACB}{2} = \frac{\alpha\beta}{4}$, on aura

$$\frac{\beta z'^2}{A\beta + \alpha} = \frac{\alpha\beta}{2};$$

d'où

$$A = \frac{2z'^2 - \alpha\alpha}{\alpha\beta}. \qquad (T')$$

Maintenant, pour obtenir une première relation entre z et z', on égalera les deux valeurs de A et l'on aura, après avoir chassé les dénominateurs,

$$(2z'^2 - \alpha\alpha)(2z^2 - \alpha c) = \alpha^2\beta^2; \qquad (M)$$

d'un autre côté les équations des droites NH, N'H' deviendront, en substituant respectivement pour A ses valeurs équivalentes (T), (T'),

$$y = \frac{\alpha\beta}{2z^2 - \alpha c}(x - \alpha + z),$$

$$y = \frac{-\alpha\beta}{2z'^2 - \alpha\alpha}(x - z'),$$

ce qui donne pour l'ordonnée du point M d'intersection de ces mêmes droites,

$$y = \mathrm{MP} = \frac{\alpha\beta z' - a^2\beta + a\beta z}{2z^2 - ac + 2z'^2 - az};$$

mais parce que

$$\mathrm{NN'} = \mathrm{AN'} - \mathrm{AN} = z' - a + z,$$

et que l'aire du triangle $\mathrm{NMN'} = \mathrm{NN'} \times \frac{\mathrm{MP}}{2} = \frac{\mathrm{ACB}}{4}$,

on aura cette autre relation entre les inconnues z, z'

$$\frac{a\beta(z' - a + z)^2}{2z^2 - ac + 2z'^2 - a\alpha} = \frac{a\beta}{4},$$

ou bien remettant pour c sa valeur $a - \alpha$, et simplifiant

$$4(z' - a + z)^2 = 2z^2 - a^2 + 2z'^2,$$

ou enfin

$$2z'^2 + 2z^2 + 5a^2 - 8az' + 8zz' - 8az = 0. \quad (\mathrm{N})$$

Si l'on veut une solution géométrique du problème proposé, on construira séparément les courbes dont les lieux sont déterminés par les deux équations (M), (N); les divers points d'intersection de ces courbes donneront les valeurs de z et de z', et l'on obtiendra par le moyen de l'une des équations (T), (T'), la position du point M où devront se croiser perpendiculairement les droites NH, N'H'. On pourrait encore parvenir au même but en construisant, par la méthode exposée au n° 172 du Traité d'application de l'Algèbre à la Géométrie de M. Lacroix, l'équation du huitième degré résultante de l'élimination de l'une des inconnues entre les équations (M), (N); mais il faut l'avouer, quoiqu'il soit intéressant d'examiner si les formules dont dépend la solution d'un problème de Géométrie peuvent se construire avec simplicité et élégance, les méthodes numériques d'approximation, au point où elles sont portées aujourd'hui, doivent être en général employées de préférence, parce qu'elles conduisent toujours, avec plus de précision, aux

résultats que les opérations graphiques n'atteignent qu'imparfaitement.

THÉORÈME.

80. *Trois cercles inégaux étant donnés de grandeur et de position sur un plan, si en les considérant deux à deux on leur mène des tangentes extérieures jusqu'à ce qu'elles se coupent, les trois points d'intersection qu'on obtiendra de cette manière seront en ligne droite.*

[Fig. 50.] Supposons que les tangentes communes à deux des cercles donnés C, C′, C″, se rencontrent en A, M, M′; il s'agit de démontrer que ces trois points sont en ligne droite.

Soient r, r', r'' les rayons des cercles C, C′, CC″, et faisons les distances

$$C'C''=a,\ CC''=a',\ CC'=a'',$$
$$C'M=b,\ CM'=b',\ AC'=b'';$$

enfin menons par le point M la droite Mr' parallèle à CM′, jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite AC′, et faisons $C'R'=x$, $R'M=y$.

On aura, à cause des triangles semblables C′C″C, C′MR′, ces deux proportions

$$a : a'' :: b : x = \frac{a''b}{a},$$

$$a : a' :: b : y = \frac{a'b}{a};$$

et si la droite AM ne passe pas par le point M′ où les tangentes aux cercles CC″ se rencontrent, elle coupera la ligne des centres C″M′ en un autre point m. Dans ce cas les triangles semblables AR′M, ACm, donneront

$$b''-x : y :: a''+b'' : Cm;$$

d'où

$$Cm = \frac{y(a''+b'')}{b''-x} = \frac{a'b\,(a''+b'')}{ab''-a''b}.$$

Mais par le problème du n° 61, on a

$$C'M = b = \frac{ar'}{r'' - r'},$$

$$CM' = b' = \frac{a'r}{r'' - r},$$

$$AC' = b'' = \frac{a''r'}{r - r'};$$

ainsi en substituant dans l'expression de Cm pour b et b'' leurs valeurs, on aura, après les réductions qui se présentent d'elles-mêmes,

$$Cm = \frac{a'r}{r'' - r};$$

cette valeur étant précisément celle de b', on doit en conclure que les points m et M′ coïncident; donc le théorème énoncé a réellement lieu.

Les élèves pourront s'exercer à chercher à exprimer les coordonnées des points M, M′, C″ en fonction des rayons $r\,r'\,r''$, et des distances $a\,a'\,a''$, en prenant pour axes des x, y, les droites AX, AY perpendiculaires entre elles. Si par exemple, xy, $x'y'$, sont les coordonnés rectangles des points M, M′, ils trouveront que $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$, ce qui démontre encore la proposition; mais ce procédé analytique n'est pas le plus simple que l'on puisse imaginer.

Si les tangentes communes à deux cercles se coupaient entre leurs centres, c'est-à-dire si elles étaient menées intérieurement à ces courbes, il y aurait toujours deux de ces points d'intersection et l'un des points A, M, M′ qui seraient sur une même droite; c'est ce que l'on propose de démontrer.

Lorsque l'on a $r'' = r$, non-seulement les tangentes M, n'', M′K sont parallèles entre elles, mais encore la ligne C″ C, qui joint les centres des cercles égaux, est parallèle à la droite AM qui passe par les concours des tangentes

communes à deux cercles inégaux [fig. 51]. Cette proposition qui, je pense, n'avait pas été remarquée avant la première édition de cet Ouvrage, ne laisse pas d'être curieuse : on peut, d'après ce qui précède, en donner facilement une démonstration *à priori*, et nous observerons aux lecteurs familiarisés avec les considérations de la Géométrie descriptive, que cette même proposition conduit naturellement à la suivante :

Si de trois sphères données de grandeur et de position, deux sont égales, la commune section du plan qui passe par les centres des trois sphères et du plan qui leur est tangent, est toujours parallèle à la droite qui joint les centres des sphères égales.

THÉORÈME.

81. *Si par tant de points que l'on voudra d'une droite donnée de position à l'égard d'une courbe quelconque du second ordre, on mène de deux en deux des tangentes à cette courbe, les lignes qui joindront les contacts d'un même couple de tangentes se couperont en un seul et même point, et réciproquement.*

Supposons que la courbe du second degré soit rapportée à des axes obliques [fig. 54], tels que l'axe des y soit parallèle à la droite donnée TT′; son équation, en plaçant l'origine des coordonnées à l'extrémité A d'un de ses diamètres, sera (n° 52)

$$(1) \qquad y'^2 = mx' + nx'^2,$$

et une droite T′M′, qui serait tangente à cette courbe et qui serait assujettie à passer par un point T′ ayant pour coordonnées $\alpha\beta$, aurait pour équation

$$(2) \qquad 2\beta y' = (2n\alpha + m)\, x' + m\alpha.$$

Mais cette seconde équation est aussi celle de la corde M′m′ qui joint les points de contact des deux tangentes

qu'on peut mener par un même point, lorsque x' et y' sont considérées comme les coordonnées courantes (n° 55); ainsi l'abscisse du point où cette corde coupe l'axe des x est

$$(3) \qquad x' = -\frac{m\alpha}{2n\alpha + m},$$

et ne dépend que de la distance α de l'origine A des coordonnées au point T où la droite TT′ rencontre l'axe des x : sa valeur sera donc toujours la même quand on ne fera varierque l'ordonnée β du point T′; ce qui suffit pour prouver la vérité du théorème énoncé.

Il est inutile de faire remarquer que cette valeur particulière de $x' = \text{AR}$ se présente sous la forme négative, parce que nous avons supposé originairement l'abscisse α positive. Si l'on voulait se conformer à la disposition de la figure, il faudrait écrire $x' = \frac{m\alpha}{2n\alpha + m}$; mais dans l'un comme dans l'autre cas, l'on voit que α et x' sont de signes contraires.

L'équation (1), et celle (2) dans laquelle on ferait $\beta = 0$, prouvent sur le champ que *la droite menée par le sommet d'un angle circonscrit à une courbe du second ordre et par le centre de cette courbe, divise la corde de contact en deux parties égales.*

PROBLÈME.

82. [Fig. 55.] *Deux points* B, C *étant donnés de position à l'égard d'un cercle connu, trouver sur la circonférence un point* M, *duquel menant au centre* A, *et aux points donnés les droites* AM, MB, MC, *les sinus des angles* AMB, AMC *soient entre eux dans le rapport de* m : n.

Joignez les points donnés par la droite BC, et du point A, centre du cercle donné, abaissez sur cette droite la perpendiculaire AY, que vous prendrez pour l'axe des ordonnées,

et menez la droite AX parallèle à BC, ce qui ne peut manquer de simplifier les calculs. Enfin, des points B, C, abaissez sur AX les perpendiculaires BH, CK.

Maintenant, soient

$$AH = \alpha, \quad AK = \alpha', \quad BH = CK = \beta,$$

et x, y les coordonnées du point M cherché.

La droite BM qui doit passer par un point B dont les coordonnées sont α, β, forme avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente a pour expression

$$A = -\frac{\beta - y}{\alpha + x}.$$

De même la droite MC forme avec l'axe AX un angle dont la tangente est

$$A' = \frac{\beta - y}{\alpha' - x}.$$

Enfin, la tangente A″ de l'angle produit par la droite AM et l'axe des abscisses, s'exprime par

$$A'' = \frac{y}{x}.$$

Or, selon le n° 45, le sinus de l'angle M′MC, formé par les deux droites AM, MQ, a pour expression,

$$\frac{(A'' - A')}{\sqrt{1 + A'^2}\sqrt{1 + A''^2}},$$

a' et a étant ici représentées par A″, A′.

Concluons de là que sinus CMA, ou

$$\text{sinus } M'MC = \frac{y(\alpha' - x) - x(\beta - y)}{\sqrt{(\alpha' - x)^2 + (\beta - y)^2}\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Par la même raison, si l'on substitue A à la place de A′, et que l'on fasse usage des valeurs analytiques rapportées plus haut, on obtiendra sin BMA,

ou $$\sin \mathrm{AMN} = \frac{y(\alpha + x) + (\beta - y)}{\sqrt{(\alpha + x)^2 + (\beta - y)^2}\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Mais, suivant l'énoncé du problème, on doit avoir cette proportion :

$$\sin \mathrm{AMB} : \sin \mathrm{AMC} :: m : n;$$

d'où

$$m \sin \mathrm{AMC} = n \sin \mathrm{AMB}.$$

Mettant dans cette équation, au lieu de sinus AMC, et de sinus AMB, leurs valeurs calculées ci-dessus, on aura, après s'être débarrassé des dénominateurs, et avoir simplifié,

$$(\alpha' ny - \beta nx)\sqrt{(\alpha + x)^2 + (\beta - y)^2}$$
$$= (\alpha my + \beta mx)\sqrt{(\alpha' - x)^2 + (\beta - y)^2}. \qquad (1)$$

Si l'on combinait cette équation avec celle du cercle donné

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad (2)$$

on arriverait à une équation du sixième degré en x, et en appliquant le procédé du n° 172 (*L. C.*), on obtiendrait l'abscisse AP du point cherché (*). C'est à ce résultat qu'est parvenu Descartes dans la soixante-cinquième de ses Lettres, tome III. Il est remarquable que la solution de ce problème dépend d'une manière bien simple de celle de cette question :

Trois points A, B, C *étant donnés* [fig. 56], *soient décrites des circonférences sur les distances* AB, AC *prises pour diamètres, et du point* A *soient menées tant de cordes* AE, AD *que l'on voudra, mais qui soient toujours entre elles dans le même rapport; on demande la nature de la courbe sur laquelle se trouveront les points* M *d'intersection des droites* EC, BD.

(*) Il n'est peut-être pas inutile de prévenir que les quantités renfermées sous les radicaux de l'équation (1) sont susceptibles d'être simplifiées au moyen de l'équation (2); et c'est ce qui fait que l'équation finale en x n'est que du sixième degré.

Si l'on appliquait convenablement l'analyse précédente à ce problème, et que l'on prît AD et AE dans le rapport de $m : n$, c'est-à-dire de sin AMB : sin AMC, on retomberait sur l'équation (1) : d'où il suit que lorsque l'intersection des droites EC, BD s'effectuera sur la circonférence du cercle donné, le point M sera celui qui satisfait à la première proposition; et c'est ce qu'il est facile de voir d'abord sans faire aucun calcul.

On démontrerait fort aisément, par la méthode des *minimis*, qu'une bille allant de B en C, en frappant la bande circulaire M, doit parcourir une ligne brisée BMC, telle que les angles BMA, CMA soient égaux.

PROBLÈME.

83. *Étant donné un point lumineux d'où partent des rayons divergens qui viennent frapper une surface sphérique réfringente, trouver le point de concours de chaque rayon réfracté avec l'axe de la sphère qui passe par le point lumineux, connaissant d'ailleurs la direction des rayons incidens.*

[Fig 57.] Soient les lignes connues $AC = a$, $BC = r$, $CP = p$, $PM = q$; et l'inconnue $CX = z$.

Si l'on prend le point lumineux A pour origine des axes rectangles, l'équation du rayon incident AM sera

$$y = \frac{q}{a - p} x,$$

et celle du rayon réfracté MX,

$$y = -\frac{q}{z + p}(x - a - z);$$

De plus entre p et q on aura la relation

$$p^2 + q^2 = r^2.$$

Cela posé, puisque les perpendiculaires CE, CF partent

du point C situé sur l'axe des abscisses, on aura (n° 43) par rapport au premier rayon,

$$CE = \frac{-a\alpha}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{-\alpha\sqrt{r^2-p^2}}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha p+r^2}},$$

et par rapport au rayon réfracté,

$$CF = \frac{-a\alpha-b}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{-z\sqrt{r^2-p^2}}{\sqrt{z^2+2pz+r^2}};$$

or le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction étant censé connu, on a CE : CF :: α : k. On déduira donc de là, et des valeurs analytiques précédentes,

$$\frac{k}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha p+r^2}} = \frac{z}{\sqrt{z^2+2pz+r^2}};$$

et si, pour abréger, on fait $m = \frac{k^2}{\alpha}$, $\alpha + \frac{r^2}{\alpha} - m = n$, on tirera de cette équation

$$z = \frac{mp + \sqrt{m^2p^2 - 2mr^2p + mnr^2}}{n-2p}.$$

Ainsi quand on aura la direction du rayon incident AM, on connaîtra le point M; et à l'aide de cette valeur de z, on aura le point X de concours du rayon réfracté MX avec l'axe AX.

Le problème que nous venons de résoudre est le 31e de l'*Arithmétique universelle*. L'illustre auteur de cet immortel ouvrage l'a résolu par la comparaison des triangles semblables que présente la construction de la figure, et il est parvenu au résultat précédent. Selon cette figure les rayons incidens sont divergens et passent dans un milieu plus dense; mais s'il arrivait le contraire, le procédé de calcul serait encore le même, en ayant égard toutefois à la différence des conditions.

PROBLÈME.

84. [Fig. 58.] *Un point* M *étant donné de position dans un angle connu* BAX, *trouver les coordonnées du centre d'un cercle tangent à la droite* AX, *qui passe par le point* M *et qui coupe le côté* AB, *de manière que la partie* m m′ *interceptée dans le cercle soit d'une grandeur donnée.*

Soient α, β les coordonnées du point M;

$$mm' = 2p,$$

la tangente de l'angle BAX $= a$.

Soient en outre

$$\left.\begin{matrix}\alpha' \\ \beta'\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}x \\ y\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}x' \\ y'\end{matrix}\right\}$$

les coordonnées des points

$$M', \qquad m, \qquad m';$$

et puisque le cercle doit être en contact avec AX, son rayon sera égal à β'.

L'équation du cercle cherché, pour un point quelconque de sa circonférence, est (n° 47)

$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2=\beta'^2, \qquad (1)$$

et pour le point donné

$$(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2=\beta'^2; \qquad (2)$$

de plus la droite AB est donnée par

$$y = ax, \qquad (3)$$

et par rapport à la distance $m\,m'$ on a

$$4p^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2. \qquad (4)$$

Toutes les conditions du problème étant exprimées par des équations, et celles-ci étant en nombre suffisant pour déterminer les inconnues, on obtiendra une équation finale en α' ou en β'. Voici le détail de l'élimination.

Les équations (1) et (3) étant accordées ensemble donneront les valeurs de x, y et de x', y', c'est-à-dire, les coordonnées des points d'intersection m, m'; parce qu'en général une droite coupe la circonférence en deux points : On trouve en effet,

$$x = \frac{a\beta' + \alpha' \pm \sqrt{a^2\beta'^2 - a^2\alpha'^2 + 2a\alpha'\beta'}}{1 + a^2},$$

et

$$y = \frac{a\alpha' + a^2\beta' \pm a\sqrt{a^2\beta'^2 - a^2\alpha'^2 + 2a\alpha'\beta'}}{1 + a^2}.$$

Or, si l'on désigne seulement par x, y les valeurs de ces expressions relatives aux signes supérieurs des radicaux, et par x', y' les valeurs prises par rapport aux signes inférieurs, on aura, après avoir éliminé x, y, et x', y' de l'équation (4), et chassé le dénominateur,

$$4p^2(a^2+1)^2 = 4a^2\beta'^2(a^2+1) - 4a^2\alpha'^2(a^2+1) + 8a\beta'(a^2+1)\alpha';$$

ou bien simplifiant, et faisant pour abréger,

$$a^2 + 1 = m^2,$$

on trouvera

$$p^2m^2 = a^2\beta'^2 - a^2\alpha'^2 + 2a\alpha'\beta' \text{ (*)}. \qquad \text{(A)}$$

Faisant passer le terme $a^2\alpha'^2$ dans le premier membre; ajoutant α'^2 de part et d'autre, on aura

---

(*) On parviendrait tout d'abord à ce résultat, si l'on voulait partir de cette considération, que dans le cercle, toute perpendiculaire M'N abaissée du centre M' sur une corde mm' divise cette corde en deux parties égales. En effet, les coordonnées du point M' étant désignées par α' et β', l'expression de la perpendiculaire M'N sera, par le n° 43, $-\frac{\beta' - a\alpha'}{\sqrt{1+a^2}}$, ou $\frac{\alpha' - \beta}{\sqrt{1+a^2}}$; et à cause de $m\text{N} = p$ et de $m\text{M}' = \beta$, le triangle rectangle mNM' fournira cette relation entre ses côtés, $\frac{(a\alpha' - \beta')^2}{1+a^2} + p^2 = \beta'^2$, laquelle étant développée, deviendra identique avec le résultat dont il est question.

$$p^2m^2 + \alpha'^2(a^2+1) = a^2\beta'^2 + 2\,a\alpha'\beta' + \alpha'^2.$$

Enfin, extrayant la racine carrée, et faisant attention que $a^2+1=m^2$; il viendra

$$m\sqrt{\alpha'^2+p^2} = a\beta' + \alpha'.$$

J'observe maintenant que de l'équation (2) on tire, en désignant $\alpha^2+\beta^2$ par γ^2,

$$\beta' = \frac{\gamma^2 + \alpha'^2 - 2\,\alpha\alpha'}{2\beta}. \qquad \text{(B)}$$

Ainsi substituant cette valeur dans l'équation précédente, il en résultera, après avoir chassé le radical et le dénominateur, et ordonné par rapport à l'inconnue α',

$$\left.\begin{array}{l} a^2\alpha'^4 + 4\,a\,\beta \\ \quad -4\,a^2\,\alpha \end{array}\right| \begin{array}{l} \alpha'^3 + 4(\beta^2 - 2\alpha\beta + a^2\alpha^2) \\ \qquad\qquad + 2\,a^2\gamma^2 \\ \qquad\qquad - 4\beta^2m^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \alpha'^2 + 4\,a\,\beta\gamma^2 \\ \quad -4\,a^2\alpha\gamma^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \alpha' + a^2\gamma^4 \\ -4\beta^2m^2p^2 \end{array}\Bigg\} = 0.$$

d'où l'on voit que la valeur de l'abscisse α' du point de contact cherché dépend d'une équation du quatrième degré; mais pour donner à cette équation une forme un peu plus simple, nous rendrons d'abord tous ses termes homogènes, en restituant partout où il en sera besoin, les puissances de l'unité qui peut être prise arbitrairement (n° 71. L. C.). Pour cet effet, soit $1=\alpha$, on aura, en vertu du principe de l'homogénéité,

$$\left.\begin{array}{l} a^2\alpha'^4 + 4(a\alpha\beta - a^2\alpha)\alpha'^3 + 4(\alpha\beta - a\alpha)^2 \\ \qquad\qquad + 2a^2\gamma^2 \\ \qquad\qquad - 4\beta^2m^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \alpha'^2 + 4\gamma^2(a\alpha\beta - a^2\alpha)\alpha' + a^2\gamma^4 \\ \qquad\qquad - 4\beta^2m^2p^2 \end{array}\Bigg\} = 0.$$

Divisant tout par a^2, et posant pour plus de commodité

$$\frac{\alpha\beta}{a} = e, \qquad \frac{\beta m}{a} = f,$$

il viendra enfin,

$$\left.\begin{array}{l} \alpha'^4 + 4(e-\alpha)\alpha'^3 + 4(e-\alpha)^2 \\ \qquad\qquad + 2\gamma^2 \\ \qquad\qquad - 4f^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \alpha'^2 + 4\gamma^2(e-\alpha)\alpha' + \gamma^4 \\ \qquad\qquad - 4f^2p^2 \end{array}\Bigg\} = 0.$$

Il est très remarquable que cette dernière équation obtenue par une méthode vraiment analytique, est la même que celle à laquelle d'autres auteurs sont parvenus à l'aide de quelques constructions préparatoires. (*Voyez* à ce sujet la *Géométrie* de Bossut, page 345.) Il y a plus, c'est que ces constructions, qu'il a fallu d'abord imaginer, sont indiquées par les valeurs mêmes de e et de f; car si par le point donné M on mène respectivement aux droites AF, AP, les parallèles DM, ME, les parties DP, AE, auront pour expression

$$\frac{\alpha\beta}{a}, \quad \frac{\beta m}{a};$$

la ligne PF étant considérée toutefois comme la tangente de l'angle A. Cette conformité de résultats est donc une preuve de la généralité de la méthode que nous employons dans cet Ouvrage.

Sans chercher à construire l'équation finale en α'^4, on peut résoudre graphiquement le problème, en construisant d'une part l'équation (A), et de l'autre l'équation (B); parce que le nombre des intersections de ces deux courbes déterminera le nombre des cercles susceptibles de satisfaire à la question. De cette manière, les solutions graphiques sont souvent plus élégantes et plus simples que par l'autre méthode.

On peut aussi résoudre les équations à l'aide des tables de logarithmes et de celles des sinus; mais nous ne donnerons aucun exemple de ce genre : nous indiquerons seulement la *Trigonométrie* de Cagnoli, qui ne laisse rien à désirer à ce sujet.

PROBLÈME.

85. *Trouver le rayon d'un cercle tangent à trois autres.*

Première solution. Supposons que le cercle C touche extérieurement les trois autres c, c', c'' donnés de grandeur

et de position. Soient r, r', r'' les rayons de ces derniers, R celui du cercle C cherché, $\alpha = c'c''$, $\alpha' = cc''$; $\alpha'' = cc'$, les distances connues des centres des trois cercles donnés; φ l'angle que α' fait avec la distance inconnue $c\mathrm{C} = \mathrm{R} + r$; enfin l'angle $c''cc' = \theta$.

Le triangle $\mathrm{C}cc''$ donne

$$(\mathrm{R} + r'')^2 = \alpha'^2 + (\mathrm{R} + r)^2 - 2\alpha' (\mathrm{R} + r) \cos \varphi;$$

le triangle $\mathrm{C}cc'$ donne de même,

$$(\mathrm{R} + r')^2 = \alpha''^2 + (\mathrm{R} + r)^2 - 2\alpha'' (\mathrm{R} + r) \cos (\theta - \varphi);$$

faisant les développemens des puissances et réduisant, on obtient

$$\text{(D)} \qquad (\mathrm{R} + r) \cos \varphi = \frac{r - r''}{\alpha'} \mathrm{R} + \frac{\alpha'^2 + r^2 - r''^2}{2\alpha'},$$

$$\text{(E)} \qquad (\mathrm{R} + r) \cos (\theta - \varphi) = \frac{r - r'}{\alpha''} \mathrm{R} + \frac{\alpha''^2 + r^2 - r'^2}{2\alpha''}.$$

Telles sont les équations les plus simples entre les deux inconnues R et φ. Pour en éliminer l'angle φ, écrivons d'abord ces deux équations d'une manière abrégée, ainsi qu'il suit :

$$\text{(D')} \qquad (\mathrm{R} + r) \cos \varphi = m\mathrm{R} + n,$$

$$\text{(E')} \qquad (\mathrm{R} + r) \cos (\theta - \varphi) = m'\mathrm{R} + n', \quad (*)$$

et remarquons qu'à cause de

$$\cos (\theta - \varphi) = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi,$$

on a

$$\sin \theta \sin \varphi = \cos (\theta - \varphi) - \cos \theta \cos \varphi;$$

par suite, en élevant les deux membres au carré et réduisant,

$$\text{(F)} \quad \cos^2\varphi + \cos^2 (\theta - \varphi) + \cos^2\theta - 2 \cos \theta \cos\varphi \cos (\theta - \varphi) = 1.$$

(*) Les valeurs de n et n' sont faciles à construire, puisqu'elles donnent la position des *centres radicaux* des cercles cc'' et cc' (n° 47).

Mettant ici pour $\cos\varphi$ et $\cos(\theta - \varphi)$ leurs valeurs tirées de (D′) et (E′), il viendra

$$(G)\quad \left.\begin{array}{l|l|l} m^2 + m'^2 & R^2 + 2(mn + m'n') & R + n^2 + n'^2 \\ -\sin^2\theta & -2r\sin^2\theta & -r^2\sin^2\theta \end{array}\right\} = 0.$$

Nous voilà arrivés par une route très directe à l'équation du deuxième degré, qui fait connaître le rayon du cercle cherché et qui donne par conséquent deux valeurs de R. La plus petite valeur est le rayon du cercle C touché extérieurement par les trois autres, et la plus grande est le rayon du cercle touché intérieurement par ceux-ci. Je ne parlerai ni des six autres cas particuliers, qui se déduiraient aisément de cette équation, ni de la construction géométrique à laquelle les équations (D, E) donneraient lieu; parce que la solution suivante, due à M. Gergonne, est d'une extrême simplicité et de la plus grande élégance, et qu'elle s'applique non-seulement à la recherche d'une sphère tangente à quatre autres, mais même à celle d'un cercle qui en touche trois autres donnés sur la surface d'une sphère, comme on le verra dans la troisième section. (*)

Deuxième solution. Rapportons tous les cercles à des coordonnées rectangles, et désignons en conséquence par a, b les coordonnées du centre de c; par a', b', celles du centre c'; par A, B les coordonnées inconnues du cercle cherché C, dont le rayon est R; enfin, par x, y les coordonnées du point où le cercle c'', dont nous placerons le centre à l'origine des axes, touche le cercle C à décrire. On aura (n° 47), en supposant que tous les contacts soient extérieurs,

(*) Le n° 6 de la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, et la *Géométrie descriptive* de M. Hachette, contiennent une solution géométrique tant du problème actuel que de celui où il s'agit de déterminer le centre et le rayon d'une sphère tangente à quatre autres sphères données. Viète, qui a résolu le premier problème, l'a ramené à la description d'un cercle tangent à deux autres et passant par un point donné.

$$(1)\qquad (A-a)^2+(B-b)^2=(R+r)^2,$$
$$(2)\qquad (A-a')^2+(B-b')^2=(R+r')^2,$$
$$(3)\qquad A^2+B^2=(R+r'')^2.$$

Ces équations sont en nombre suffisant pour faire connaître les coordonnées A, B' et le rayon R du cercle cherché; mais comme le mérite d'une solution tient à la simplicité et à l'élégance des constructions géométriques, il vaudra mieux procéder d'abord à la détermination des points de contact du quatrième cercle avec les trois autres, afin de n'avoir ensuite qu'à décrire un cercle qui passe par trois points donnés. En partageant ainsi l'opération en deux parties, l'on ne peut manquer d'éluder la difficulté que présenterait la recherche directe des coordonnées et du rayon du cercle à décrire. Or, un des points de contact, par exemple celui des cercles c'' et C, est nécessairement situé sur la droite qui joint leurs centres, et cette droite a évidemment pour équation

$$(4)\qquad Ay=Bx.$$

Si donc x, y sont les coordonnées du point de contact cherché, on aura en outre entre elles cette relation,

$$(5)\qquad x^2+y^2=r''.$$

Ainsi, les inconnues du problème sont maintenant x, y, A, B, R. Pour les réduire à deux, tâchons de trouver entre x, y une relation indépendante de A, B, R. D'abord on voit, par la forme des équations (1, 2, 3), que les carrés de A, B disparaîtront, en prenant la différence de chacune des deux premières à la troisième. En effet, on a, après les développemens et les réductions,

$$(6)\quad 2aA+2bB-2(r''-r)R=a^2+b^2+(r''-r)(r''+r),$$
$$(7)\quad 2a'A+2b'B-2(r''-r')R=a'^2+b'^2+(r''-r)(r''+r');$$

ou en introduisant ici $R+r''$, afin de rendre plus facile l'élimination de R entre ces équations et celle (3),

$$(8)\quad 2aA+2bB-2(r''-r)(R+r'')=a^2+b^2-(r''-r)^2,$$
$$(9)\quad 2a'A+2b'B-2(r''-r')(R+r'')=a'^2+b'^2-(r''-r')^2.$$

Ces deux dernières et l'équation (3) conduiraient donc de la manière la plus simple aux valeurs analytiques des coordonnées du centre et du rayon du cercle cherché; mais puisque nous voulons trouver la droite sur laquelle est situé le point de contact des cercles c'' et C, combinons entre elles les équations (3, 4, 8, 9) ainsi qu'il suit.

Des équations (3, 4) on tire

$$A=\frac{x(R+r'')}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad B=\frac{y(R+r'')}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

ou plus simplement, à cause de la relation (5), on a

$$A=\frac{x(R+r'')}{r''},\quad B=\frac{y(R+r'')}{r''}.$$

Substituant ces valeurs dans (8) et (9), il vient

$$2[ax+by-r''(r''-r)]\,(R+r'')=r''[a^2+b^2-(r''-r)^2],$$
$$2[a'x+b'y-r''(r''-r')]\,(R+r'')=r''[a'^2+b'^2-(r''-r')^2];$$

enfin, en éliminant $R+r''$, on a

$$(10)\quad \frac{ax+by-r''(r''-r)}{a^2+b^2-(r''-r)^2}=\frac{a'x+b'y-r''(r''-r')}{a'^2+b'^2-(r''-r')^2}.$$

Telle est l'équation d'une droite qui coupe le cercle c'' en deux points, et qu'il faut construire. Elle conserve la même forme lorsque tous les contacts sont intérieurs, parce qu'alors les signes des rayons r, r', r'', changent à la fois : elle résout donc deux problèmes absolument opposés.

Si l'on égale chaque membre à une indéterminée M, on aura ces deux droites,

$$(A)\quad \begin{cases} ax+by-r''(r''-r)=M[a^2-b^2-(r''-r)^2], \\ a'x+b'y-r''(r''-r')=M[a'^2+b'^2-(r''-r')^2], \end{cases}$$

dont la commune section sera évidemment un des points

de la ligne (10). Mais puisque M peut être quelconque, il y a évidemment une infinité de systèmes de droites qui satisfont à la question. Soient donc successivement $M = 0$, $M = 1$, on aura ces deux couples d'équations,

$$(11) \qquad ax + by = r''(r'' - r),$$
$$(12) \qquad a'x + b'y = r''(r'' - r'),$$
$$(13) \qquad a(x - a) + b(y - b) = r(r'' - r),$$
$$(14) \qquad a'(x - a') + b'(y - b') = r'(r'' - r'),$$

lesquels sont propres à fournir deux points de la droite cherchée. En les comparant à l'équation (7) du problème du n° 55, on verra sur-le-champ que l'équation (11) est celle de la corde de contact avec le cercle c'' des tangentes communes à c et c''; que, pareillement, l'équation (13) est celle de la corde de contact des mêmes tangentes avec le cercle c; enfin, que les équations (12 et 14) sont les cordes de contact avec c'' et c' des tangentes communes à ces deux cercles. Il n'est pas moins évident que les droites (11, 13) sont parallèles entre elles (n° 40) et perpendiculaires à la droite qui joint les centres des deux cercles cc''; et que les droites (12, 14) jouissent d'une propriété toute pareille.

De là résulte cette construction donnée par M. Gergonne : « Soient menées les tangentes communes extérieures à nos » trois cercles pris deux à deux, et les cordes de contact de » ces tangentes avec chaque cercle. Les deux cordes de con- » tact sur c se couperont en M, et leurs parallèles sur c et » c'' en N. Les deux cordes de contact sur c' se couperont » en M′, et leurs parallèles sur c'' et c en N′. Les deux » cordes de contact sur c'' se couperont en M″, et leurs pa- » rallèles sur c et c' en N″.

» Soient menées MN, M′N′, M″N″; MN coupera c en t » et θ; M′N′ coupera c' en t' et θ'; et M″N″ coupera c'' en » t'' et θ''. Faisant ensuite passer deux cercles l'un par

» t, t', t'', l'autre par θ, θ', θ'', ces deux cercles rempliront » les conditions du problème.

» On peut remarquer, au surplus, que les centres de ces » deux cercles sont faciles à déterminer ; car ils se trouve- » ront à l'intersection des droites menées des centres des » cercles donnés, soit aux trois points t, t', t'', soit aux » trois points θ, θ', θ''.

» On se convaincra facilement, d'après tout ce qui a été » dit ci-dessus, que, pour obtenir les six autres solutions » dont le problème est susceptible, il ne s'agit que de sub- » stituer, tour à tour, à deux des couples de tangentes exté- » rieures, les couples de tangentes qui se croisent entre les » deux cercles qu'elles touchent à la fois.

» En vain objecterait-on que lorsque deux des cercles » donnés sont l'un dans l'autre, en tout ou en partie, ces » constructions sont en défaut, puisqu'alors ils n'ont plus » de tangentes intérieures communes, et peuvent même » n'en point avoir d'extérieures : on peut observer en effet » qu'alors même les droites (11, 12, 13, 14) ne cessent » point pour cela d'être réelles, et peuvent toujours être » construites. On peut même définir les droites (11, 13), » indépendamment de toute considération de tangentes, en » disant que ce sont des cordes ayant pour pôle commun » le centre de similitude de c et c'' (n° 47). »

Le tome VII des *Annales de Mathématiques*, pag. 289 et suivantes, renferme sur cette matière d'autres détails non moins intéressans, dont le lecteur fera bien de prendre connaissance. Il suffisait ici de faire voir que ce problème et son analogue dans l'espace, sur lesquels tant de géomètres anciens et modernes se sont exercés, peuvent être traités par les voies les plus élémentaires et avec la plus grande facilité.

THÉORÈME.

86. *Si à partir de l'extrémité* (o) *du diamètre d'un cercle de rayon* a, *l'on divise la circonférence en* 2 m *parties égales, et que l'on désigne par* (1), (2), (3)... *tant les points de division qui sont d'un côté, que ceux qui sont de l'autre côté du diamètre;* ensuite *que d'un point extérieur pris sur le prolongement de cette ligne, du côté de son extrémité* (o), *et à une distance* x *du centre, on mène au premier système de points de division les droites* $\rho_{(1)}\ \rho_{(2)}\ \rho_{(3)}\cdots$ *et au second système les droites* $\varsigma_{(1)}\ \varsigma_{(2)}\ \varsigma_{(3)}\cdots$, *le produit de toutes les droites* $\rho_{(0)}\ \rho_{(2)}\ \rho_{(4)}\cdots\ \varsigma_{(2)}\ \varsigma_{(4)}\cdots$ *correspondantes aux numéros pairs, sera égal à* $x^m - a^m$, *et le produit de toutes les droites correspondantes aux numéros impairs sera égal à* $x^m + a^m$.

Pour démontrer cette proposition, connue sous le nom de *Théorème de Cotes*, cherchons quelles sont les formes qu'affectent les racines des équations

$$x^m - a^m = 0, \quad \text{et} \quad x^m + a^m = 0.$$

D'abord il est démontré (p. 351, *Trigon.* de Legendre) que $(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^m = \cos m\varphi + \sin m\varphi\sqrt{-1}$: or, si l'on fait $x = a(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$, on aura

$$x^m = a^m(\cos m\varphi + \sin m\varphi\sqrt{-1});$$

et si l'on met cette valeur dans l'équation $x^m - a^m = 0$, on obtiendra

$$\cos m\varphi + \sin m\varphi\sqrt{-1} - 1 = 0.$$

Pour que cette dernière ait lieu, il faut nécessairement que la partie imaginaire s'anéantisse d'elle-même; alors

$$\cos m\varphi = 1, \qquad \sin m\varphi = 0.$$

Il existe une infinité de valeurs qui satisfont à cette seconde condition, $\sin m\varphi = 0$: en effet, on peut faire $m\varphi = z\pi$,

z étant un nombre entier et π deux angles droits. Mais la première condition exigeant que le cosinus de $m\varphi$ soit égal au rayon, il faut en outre que l'arc $m\varphi$ soit un multiple pair de la demi-circonférence, c'est-à-dire, que l'on ait $z=2n$, d'où $\varphi=\frac{2n\pi}{m}$; donc

$$x=a\left(\cos\frac{2n\pi}{m}\pm\sin\frac{2n\pi}{m}\sqrt{-1}\right)$$

est l'expression générale des m racines de l'équation $x^m-a^m=0$. Nous n'avons pas besoin de démontrer que lorsque m est un nombre impair, cette équation n'a qu'une racine réelle qui est $x=a$; mais qu'elle en a deux lorsque m est pair, savoir $x=+a$ et $x=-a$. Il résulte de là que ses deux facteurs simples ou du premier degré sont

$$x-a\left(\cos\frac{2n}{m}\pi+\sin\frac{2n}{m}\pi\sqrt{-1}\right),$$

$$x-a\left(\cos\frac{2n}{m}\pi-\sin\frac{2n}{m}\pi\sqrt{-1}\right);$$

en les multipliant l'un par l'autre, on a pour facteur réel du second degré

$$x^2-2ax\cos\frac{2n}{m}\pi+a^2;$$

c'est-à-dire que l'équation proposée est encore divisible par ce facteur. Ainsi, dans le cas de, m impair, elle peut être présentée sous la forme

$$x^m-a^m=(x-a)\left(x^2-2ax\cos\frac{2\pi}{m}+a^2\right)$$
$$\times\left(x^2-2ax\cos\frac{4\pi}{m}+a^2\right),\text{ etc.}$$

Il n'est pas difficile de prouver que, dans la même hypothèse, les racines de l'équation $x^m+a^m=0$ sont comprises dans la formule

$$x = a\left(\cos\frac{(2n+1)}{m}\pi \pm \sin\frac{(2n+1)}{m}\pi\sqrt{-1}\right),$$

et que par conséquent l'on a

$$x^m + a^m = (x+a)\ (x^2 - 2ax\ \cos\frac{\pi}{m} + a^2)$$
$$\times\ (x^2 - 2ax\ \cos\frac{3\pi}{m} + a^2), \text{etc.}$$

Cela posé, si $\alpha'\ \beta'$, $\alpha''\ \beta''$, $\alpha'''\ \beta'''\ldots$ dénotent les coordonnées des extrémités de $\rho_{(1)}\ \rho_{(2)}\ \rho_{(3)}\ldots$ comptés de l'origine de ρ, on aura

$$\rho_{(0)} = x - a,$$
$$\rho_{(1)}^2 = \alpha'^2 + \beta'^2,\ \rho_{(2)}^2 = \alpha''^2 + \beta''^2, \text{ etc.};$$

d'ailleurs, puisque

$\text{arc}\,(0)\,(1) = \frac{\pi}{m}$, $\text{arc}\,(0)\,(2) = \frac{2\pi}{m}$, $\text{arc}\,(0)\,(3) = \frac{3\pi}{m}$, il est clair que l'on a

$$\alpha' = x - a\cos\frac{\pi}{m},\ \beta' = a\sin\frac{\pi}{m},$$
$$\alpha'' = x - a\cos\frac{2\pi}{m},\ \beta'' = a\sin\frac{2\pi}{m},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et par conséquent

$$\rho_{(1)}^2 = x^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{m} + a^2,$$
$$\rho_{(2)}^2 = x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{m} + a^2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

mais les droites $\rho_{(1)}\ \rho_{(2)}\ldots$ placées d'un côté du diamètre, sont égales à celles $\varsigma_{(1)}\ \varsigma_{(2)}\ldots$ qui leur correspondent de l'autre côté, donc

$$x^m - a^m = \rho_{(0)} \times \rho_{(2)} \times \rho_{(4)}\ldots\varsigma_{(2)} \times \varsigma_{(4)}\ldots$$
$$x^m + a^m = \rho_{(m)} \times \rho_{(1)} \times \rho_{(3)}\ldots\varsigma_{(1)} \times \varsigma_{(3)}\ldots$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on prenait l'origine des ρ dans l'intérieur du cercle, les deux produits précédens seraient respectivement égaux à $a^m - x^m$ et à $a^m + x^m$. Moivre généralisa ce théorème en donnant le moyen de décomposer en facteurs quadratiques réels l'équation $x^{2m} + 2px^m + q = 0$. Consultez à ce sujet le *Calcul des fonctions*, par Lagrange, page 111, et la seconde édition de la *Théorie des nombres* de M. Legendre, où l'on trouve, d'après M. Gauss, la belle théorie de la résolution de l'équation $x^n - 1 = 0$.

Il résulte de la forme de cette dernière équation, que la somme de ses racines est nulle, ce qui ne peut avoir lieu qu'en égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire de cette somme. Or, à cause de

$$x = \cos\frac{2n\pi}{m} + \sin\frac{2n\pi}{m}\sqrt{-1},$$

chacune des racines s'obtient en faisant successivement dans cette expression générale, $n = 0$, $= 1$, $= 2, \ldots = m - 1$; on a donc

$$\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{m} + \cos\frac{4\pi}{m} + \ldots + \cos\frac{(m-1)\pi}{m} = 0,$$

$$\sin 0 + \sin\frac{2\pi}{m} + \sin\frac{4\pi}{m} + \ldots + \sin\frac{(m-1)\pi}{m} = 0;$$

de plus, si l'on multipliait chaque racine par..... $\cos a + \sin a\sqrt{-1}$, leur somme, qui serait encore nulle, fournirait également ces deux relations,

$$\left.\begin{aligned}\cos a + \cos\left(a + \frac{2\pi}{m}\right) + \cos\left(a + \frac{4\pi}{m}\right)\\ + \ldots + \cos\left(a + \frac{(m-1)\pi}{m}\right)\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}\sin a + \sin\left(a + \frac{2\pi}{m}\right) + \sin\left(a + \frac{4\pi}{m}\right)\\ + \ldots + \sin\left(a + \frac{(m-1)\pi}{m}\right)\end{aligned}\right\} = 0;$$

de là ce théorème remarquable : *Si une circonférence est divisée en* m *parties égales, et qu'on prenne l'origine des arcs en un point quelconque, la somme des cosinus des* m *arcs terminés à ces points de division, sera nulle, ainsi que la somme de leurs sinus.*

CHAPITRE IV.

Des Problèmes indéterminés, ou *des lieux plans.*

87. L'ANALYSE des propositions qui sont l'objet du chapitre précédent, conduit toujours à autant d'équations distinctes qu'il y a de quantités à découvrir; mais lorsqu'il arrive le contraire, comme dans les questions qui vont suivre, l'équation finale, résultante de l'élimination possible des inconnues, en renferme nécessairement plusieurs; et comme on ne peut déterminer l'une de celles qui restent, sans attribuer préalablement des valeurs quelconques aux autres, le problème qui donne lieu à cette circonstance est dit *indéterminé*. Lorsque la solution d'un tel problème mène à une équation qui ne renferme que deux inconnues ou variables, la courbe à laquelle cette équation appartient, et qu'on nomme *lieu géométrique*, est toujours plane ou à *simple courbure*.

PROBLÈME.

Une droite et un point hors d'elle étant donnés à l'égard de deux axes rectangles, trouver l'équation de la droite assujettie à passer par ce point, et à faire avec la ligne donnée un angle connu. [Fig. 59.]

Soient α et β les coordonnées du point M donné, $y = ax + b$

l'équation de la droite CB connue, et t la tangente de l'angle donné.

L'équation de la droite cherchée MQ est

$$y - \beta = a'(x - \alpha);$$

de plus, l'angle MQB devant être égal à l'angle donné, dont la tangente est t, on aura, conformément au n° 45,

$$\frac{a' - a}{aa' + 1} = t.$$

Tirant la valeur de l'inconnue, on obtiendra, pour la tangente de la somme des deux angles connus,

$$a' = \frac{t + a}{1 - at},$$

et alors l'équation de la droite MQ sera

$$y - \beta = \left(\frac{t + a}{1 - at}\right)(x - \alpha).$$

Ainsi, en menant d'abord par l'origine A, la droite Am qui fasse avec l'axe des x un angle dont la tangente soit a', et ensuite par le point M la droite MR parallèle à Am, le problème sera résolu graphiquement.

Si l'on voulait connaître un point de la droite MR autre que M, le point R, par exemple, on ferait dans l'équation précédente, $y = 0$, et il en résulterait pour l'abscisse AR,

$$x = \alpha - \frac{\beta(1 - at)}{a + t}.$$

Lorsque la droite cherchée doit passer entre P et X, il faut, pour se conformer à l'observation du n° 45, employer l'équation

$$\frac{a' + a}{1 - aa'} = t.$$

PROBLÈME.

88. *Un angle étant donné, trouver un point duquel abaissant des perpendiculaires sur les côtés de cet angle, elles soient entre elles dans le rapport de* m : n.

[Fig. 60.] Soient x', y' les coordonnées du point M′ cherché, et a la tangente de l'angle MAB.

L'équation de la droite AM est

$$y = ax,$$

et la perpendiculaire MM′ abaissée du point M′ sur AM, a pour expression,

$$-\frac{y' - ax'}{\sqrt{1 + a^2}};$$

ainsi, d'après la condition exigée, l'on doit avoir la proportion

$$\frac{x' - y'}{\sqrt{1 + a^2}} : y' :: m : n,$$

ce qui donne

$$n(ax' - y') = my'\sqrt{1 + a^2};$$

d'où l'on tire,

$$y' = \frac{nax'}{n + m\sqrt{1 + a^2}}.$$

Si le point M′ était situé au-dessus de la droite AM, la perpendiculaire MM′ serait positive (n° 43), et l'on aurait pour lors

$$y' = \frac{nax'}{n - m\sqrt{1 + a^2}}.$$

Il y a donc une infinité de points qui satisfont à la question; et, de plus, ces points sont situés sur une droite qui passe par l'origine des coordonnées, en faisant avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique est

$$\frac{na}{n \pm m\sqrt{1+a^2}}.$$

Cette quantité se construit facilement, ainsi qu'il suit, en n'ayant égard, pour abréger, qu'au signe inférieur du radical.

Du sommet A de l'angle donné [fig. 61], élevez sur AB la perpendiculaire AD égale à n; et du même point A élevez sur AC la perpendiculaire AD′ égale à m : ensuite, par les points D, D′, menez les droites DM′, D′M′ respectivement parallèles aux droites AB, AC, et joignez le point M′ d'intersection des premières droites avec le point A; la droite indéfinie AM′ sera celle qu'il s'agissait de trouver.

Pour se convaincre de l'exactitude de cette construction, on remarquera que l'angle D′AE = l'angle CAB, parce que l'un et l'autre ont pour complément l'angle EAC; d'où il résulte que D′E $= am$, et que l'hypoténuse..... AE $= \sqrt{a^2m^2 + m^2} = m\sqrt{a^2+1} =$ QM′. De plus, il est évident qu'à cause de P′Q = P′M′ — QM′, on a

$$P'Q = n - m\sqrt{1+a^2}.$$

Cela posé, l'équation de la droite D′M′ parallèle à AC est

$$y = ax + m\sqrt{1+a^2},$$

et celle de la droite DM′ parallèle à l'axe AB, est $y = n$; ainsi, de ces deux dernières équations, l'on tirera pour l'abscisse AP′ du point M′ d'intersection,

$$x = \frac{n - m\sqrt{1+a^2}}{a};$$

et parce que la tangente de l'angle M′AB $= \frac{P'M'}{AP'}$, on aura, en employant les expressions analytiques,

$$\frac{P'M'}{AP'} = \frac{na}{n - m\sqrt{1+a^2}}$$

d'où il suit que l'équation de la droite AM′ est

$$y = \frac{nax}{n - m\sqrt{1 + a^2}}.$$

De la solution précédente l'on déduit, comme conséquence immédiate, *la manière de trouver un point duquel abaissant des perpendiculaires sur trois lignes données de position les unes à l'égard des autres, ces perpendiculaires soient dans les rapports connus de* m : n : p. Voici comment on peut effectuer la construction qui convient à ce problème.

Soient AB, AC, CD [fig. 62] les droites données; on déterminera par le procédé que l'on vient de suivre, la direction de la droite AM, de manière que les perpendiculaires MN, MP soient dans le rapport de $m : n$. On fixera pareillement la direction de la droite MC, de manière que les perpendiculaires MP, MQ soient dans le rapport de $n : p$, et le point M d'intersection des droites AM, CM sera le point qui remplira seule la condition exigée.

PROBLÈME.

89. *Tant de points que l'on voudra étant donnés sur un plan par leurs coordonnées rectangles, mener une ligne droite à travers, telle que abaissant de ces points sur cette droite une perpendiculaire, la somme des perpendiculaires d'un côté soit égale à celles de l'autre côté.*

[Fig. 63.] Supposons, pour plus de simplicité, que les points donnés ne soient qu'au nombre de trois; les considérations qui se rapportent à ce cas pourront s'étendre aisément à un plus grand nombre de points.

Soient

$$\left.\begin{matrix} \alpha\ ,\ \beta \\ \alpha'\ ,\ \beta' \\ \alpha''\ ,\ \beta'' \end{matrix}\right\} \text{ les coordonnées respectives des points } \left\{\begin{matrix} M \\ M' \\ M''. \end{matrix}\right.$$

Ce problème étant visiblement indéterminé, supposons que la droite CD soit une de celles qui satisfont à la question, et qu'elle ait pour équation

$$y = ax + b.$$

Les lignes pM, $p'M'$, $p''M''$ devant être perpendiculaires à cette droite, leurs longueurs seront respectivement

$$\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \frac{\beta' - a\alpha' - b}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \frac{\beta'' - a\alpha'' - b}{\sqrt{1+a^2}},$$

en prenant négativement les expressions des perpendiculaires situées au-dessous de la droite CD.

Ainsi, conformément à l'énoncé du problème, on aura

$$\beta - a\alpha - b + \beta' - a\alpha' - b = b + a\alpha'' - \beta'';$$

ce qui donne

$$b = \frac{\beta + \beta' + \beta''}{3} - a\,\frac{(\alpha + \alpha' + \alpha'')}{3}.$$

Comme cette quantité renferme deux inconnues a et b, on ne peut obtenir l'une d'elles sans faire une supposition sur l'autre. Soit donc $b = 0$, on aura, pour la solution qui répond à ce cas,

$$a = \frac{\beta + \beta' + \beta''}{\alpha + \alpha' + \alpha''}.$$

Mais en substituant la valeur précédente de b dans l'équation de la droite demandée, on aura

$$y - \frac{\beta + \beta' + \beta''}{3} = a\left(x - \frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{3}\right);$$

d'où il suit que toute droite qui passe par le point dont les coordonnées sont $\frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{3}$, $\frac{\beta + \beta' + \beta''}{3}$, c'est-à-dire par le centre des *moyennes distances* des points donnés aux deux axes, satisfait à l'énoncé de la proposition.

Si l'un des points M était situé au-dessous de l'axe des

abscisses, il faudrait indiquer cette circonstance en prenant négativement l'ordonnée de ce point dans l'expression de la perpendiculaire correspondante.

On verra la généralisation de ce problème dans la troisième section de ce Recueil. Nous observerons, pour le moment, que si la somme des perpendiculaires dont il s'agit devait être égale à une ligne donnée m, l'analyse précédente conduirait à cette propriété, savoir : que toutes les droites qui satisferaient à cette proposition seraient tangentes au cercle ayant pour centre celui des *moyennes* distances des points donnés, et pour rayon la droite m divisée par le nombre de ces points donnés.

PROBLÈME.

90. *Étant donnés tant de points que l'on voudra, en trouver un autre tel, que, menant de ce point une droite à chacun des autres, la somme des carrés de ces lignes soit égale à un carré donné* q^2.

[Fig. 64.] Supposons, pour simplifier les calculs, qu'il n'y ait que trois points donnés : cette restriction ne diminuera en rien la généralité de la solution du problème actuel; et désignons par

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}, \qquad \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right\}, \qquad \left.\begin{matrix}\alpha''\\ \beta''\end{matrix}\right\}$$

les coordonnées des points

$$A, \qquad A', \qquad A''.$$

Soient de plus x, y les coordonnées du point M cherché. On aura dans l'hypothèse de la figure

$$\overline{AM}^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2,$$
$$\overline{A'M}^2 = (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2,$$
$$\overline{A''M}^2 = (x-\alpha'')^2 + (y-\beta'')^2.$$

Or, si l'on développe ces équations, et que l'on égale leur somme à q^2, on aura, après avoir divisé tout par 3,

$$y^2 - \tfrac{2}{3}(\alpha + \alpha' + \alpha'')\,x + x^2 - \tfrac{2}{3}(\beta + \beta' + \beta'')\,y = \frac{q^2 - (\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2)}{3}.$$

Cette équation est très remarquable, car elle indique que tous les points qui satisfont au problème sont situés sur une circonférence de cercle, et de plus que le centre de ce cercle est précisément le centre des forces parallèles supposées toutes égales entre elles, et appliquées aux points donnés A, A′, A″, etc. (*Mécanique* de M. Francœur, n° 36, 4ᵉ édit.)

En effet, pour transporter l'origine des coordonnées au centre de la courbe, on mettra dans l'équation précédente $x' + \frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{3}$ au lieu de x, et $y' + \frac{\beta + \beta' + \beta''}{3}$ au lieu de y; alors la résultante ne renfermera plus que les secondes puissances des variables, et la quantité toute connue sera l'expression du carré du rayon du cercle à construire. Ayant donc pris une abscisse égale à $\frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{3}$, et une ordonnée correspondante égale à $\frac{\beta + \beta' + \beta''}{3}$, l'extrémité de cette ordonnée sera à la fois le centre du cercle en question, et le centre de gravité des points A, A′, A″.

Cette proposition, qui est une de celles des *Loca plana* d'Apollonius, peut se varier d'une infinité de manières; et dans toutes ses modifications elle offre des conséquences analogues à celles dont il vient d'être parlé. (*Voy.*, sur ce sujet, l'*Histoire des Mathématiques*, par Montucla, tom. I, pag. 284, 2ᵉ édit.) Nous envisagerons cette même proposition d'une manière plus générale dans la troisième section.

PROBLÈME.

91. *Un point étant donné à l'égard de deux axes perpendiculaires entre eux, déterminer le lieu des centres de tous les cercles qui sont assujettis à passer par ce point, et à être tangens à l'un des axes.*

[Fig. 65.] Soient α, β les coordonnées du point M donné; x', y' celles du centre M′ du cercle cherché; r le rayon inconnu.

Le centre M′ de l'un des cercles qui doivent passer par le point M, et être tangens à l'axe AY étant quelque part dans l'angle YAX, l'équation de la circonférence sera

$$(x-x')^2+(y-y')^2=r^2,$$

et pour le point M de cette circonférence, on aura

$$(\alpha-x')^2+(\beta-y')^2=r^2;$$

mais la condition du contact du cercle avec l'axe AY s'exprimant par $r=x'$, on a

$$(\alpha-x')^2+(\beta-y')^2=x'^2;$$

développant et ordonnant, il vient

$$y'^2-2\beta y'-2\alpha x'+\alpha^2+\beta^2=0;$$

ainsi la courbe parabolique est le lieu des centres des cercles qui jouissent de la propriété énoncée ci-dessus.

Lorsque $\beta=0$, ou, ce qui est de même, lorsque l'axe des abscisses passe par le point donné, l'on a simplement

$$y'^2=2\alpha x'-\alpha^2.$$

Pour trouver le sommet de la parabole, on fera dans cette dernière équation, $y'=0$, et l'on aura

$$x'=\frac{\alpha}{2}.$$

Le plus petit cercle, qui satisfait à l'énoncé du pro-

blème, a donc pour rayon la moitié de l'abscisse du point donné.

Si le cercle à décrire devait passer par le point M et toucher en même temps les deux axes AX, AY, le problème serait évidemment déterminé.

PROBLÈME.

92. *Une droite étant donnée de position à l'égard d'un cercle, trouver la trace des centres de tous les cercles qui sont tangens à la fois au cercle et à la droite donnés.*

[Fig. 66.] Soit AX la ligne donnée; du centre C du cercle connu, abaissez sur cette ligne une perpendiculaire AC qui pourra être prise pour l'axe des ordonnées, et soient

$$AC = b, \quad AP' = x', \quad P'C' = y';$$

r le rayon CR du cercle donné.

La distance CC′ sera exprimée en fonction des coordonnées de ses extrémités, par

$$(r + y')^2 = (b - y')^2 + x'^2.$$

Effectuant les développemens indiqués, on aura, toute réduction faite,

$$x'^2 = 2(b + r)y' - (b^2 - r^2).$$

Lorsque $x' = 0$, on a

$$y' = \frac{b^2 - r^2}{2(b + r)} = \frac{b - r}{2};$$

d'où il suit que, pour le cas de la figure, le centre du plus petit cercle touchant est situé au milieu de la distance qui se trouve entre la droite et le cercle donnés. Il peut arriver que ce dernier cercle soit touché ou coupé par la droite AX; ce qui fait différens cas qui ne sont pas difficiles à discuter.

PROBLÈME.

93. *Par deux points donnés, mener deux lignes perpendiculaires entre elles.*

[Fig. 67.] Soient

$$\left.\begin{matrix}\alpha, \beta, \\ \alpha', \beta',\end{matrix}\right\} \text{ les cordonnées des points } \left\{\begin{matrix}\text{M}, \\ \text{M}'.\end{matrix}\right.$$

L'équation de la droite MN assujettie à passer par un point donné, et à faire un angle quelconque avec l'axe des abscisses, est

$$y - \beta = \text{A}(x - \alpha),$$

l'équation de la droite M'N' qui doit lui être perpendiculaire, est

$$y - \beta' = -\frac{1}{\text{A}}(x - \alpha').$$

Or, pour que le point M' soit commun aux deux droites proposées, il faut que x et y aient les mêmes valeurs dans les équations de ces droites. Cette supposition étant faite, on éliminera la tangente A, et l'on aura

$$(y - \beta)(y - \beta') = (\alpha' - x)(x - \alpha);$$

ou en développant, et faisant passer tous les termes dans le premier membre,

$$y^2 + x^2 - (\beta' + \beta)y - (\alpha' + \alpha)x + \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0.$$

Cette équation étant celle du cercle entre ses coordonnées rectangles, il s'ensuit qu'il y a une infinité de points desquels menant des droites aux points donnés M, M', ces droites forment entre elles un quadrant.

Lorsque $\alpha = \beta = \beta' = 0$, c'est-à-dire, quand l'axe des abscisses passe par les deux points donnés, et que l'origine est au point M, l'équation finale devient

$$y^2 - \alpha' x + x^2 = 0;$$

mais voici un autre problème dont celui-ci n'est qu'un cas particulier.

PROBLÈME.

94. *Mener par deux points donnés deux droites qui fassent entre elles un angle connu.*

[Fig. 33.] Soit t la tangente de l'angle donné, et supposons, ce qui est toujours possible, que les points donnés A, P′ soient sur l'axe des abscisses. Soit en outre $AP' = \alpha$.

La droite AM qui passe par l'origine, a pour équation

$$y = ax;$$

et la droite P′M qui passe par un point pris sur l'axe, est

$$y = -a'(x - \alpha).$$

D'un autre côté, la tangente de l'angle AMP′ étant représentée par t, la tangente du supplément ou celle de l'angle NMP′ le sera par $-t$; ainsi l'on aura, suivant le n° 45,

$$t = \frac{-a' - a}{1 - aa'};$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{t + a'}{a't - 1}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation de la droite AM, il viendra

$$y = \frac{(a' + t)x}{a't - 1};$$

et si on élimine a' par le moyen de celle-ci, et de l'équation de la droite P′M, on parviendra à une relation entre les seules inconnues x, y : cette relation est

$$x^2 + y^2 - \alpha x - \frac{\alpha y}{t} = 0, \qquad \text{(A)}$$

et indique que tous les angles égaux AMP′ ont leur sommet sur une circonférence de cercle.

Lorsque l'angle donné AMP′ est droit, sa tangente t est infinie, et alors le dernier terme de l'équation (A) s'évanouit; de manière que l'on a simplement

$$x^2 + y^2 - \alpha x = 0,$$

comme dans le problème précédent.

Pour donner encore quelques exemples de construction des équations indéterminées, voici comment on procédera à l'égard de celle que nous avons désignée par (A). On y fera

$$x = x' + \frac{\alpha}{2},$$

et

$$y = y' + \frac{\alpha}{2t},$$

afin de transporter l'origine des coordonnées au centre de la courbe; et après avoir effectué les calculs nécessaires, on parviendra à

$$x'^2 + y'^2 - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{4t^2} = 0.$$

C'est l'équation du cercle rapportée au centre, le rayon étant égal à $\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4t^2}}$. (B)

Le moyen de construire cette expression radicale est aisé. En effet, élevez sur le milieu de la droite AP′ la perpendiculaire $Pm = \frac{\alpha}{2t}$, l'extrémité m de cette perpendiculaire sera le centre du cercle cherché, et la ligne AM en sera le rayon; ce qui est évident.

Il suit de cette construction que l'angle AmP = l'angle AMP′; car l'équation de la droite Am est

$$y = \left(\frac{Pm}{AP}\right) x = \frac{1}{t}\, x,$$

et puisque la tangente de l'angle mAP est $\frac{1}{t}$, sa cotangente ou la tangente de l'angle AmP sera $= t$. Concluons de là que l'angle au centre est double de l'angle inscrit : ce qui s'accorde parfaitement avec les considérations géométriques.

On remarquera que l'expression (B) du rayon peut être mise sous une forme plus simple; car d'abord on peut l'écrire ainsi

$$\frac{a}{2t}\sqrt{1+t^2};$$

mais $t =$ tang AMP′ et $\sqrt{1+t^2} =$ séc AMP′ ; donc

$$\frac{a}{2t}\sqrt{1+t^2} = \frac{a}{2\sin M}.$$

On voit maintenant comment on résoudrait graphiquement ce problème : *Déterminer la position d'un point* D, *connaissant les angles sous lesquels on voit de ce point les distances* AB, AC *données de grandeur et de position.* Consultez, pour les solutions trigonométriques, le *Traité de Géodésie*, 2e édit., tome I, page 233, et le *Traité de Topogr.*, page 47.

THÉORÈME.

95. [Fig. 68.] *Si l'on divise en un même nombre de parties égales, deux droites* AB, AC, *faisant entre elles un angle quelconque; puis si l'on joint successivement tous les points de la première droite en commençant par* B *avec tous les points de la seconde droite, en commençant par le point* (1) *de cette ligne, les intersections de deux droites consécutives prises dans l'ordre de ce tracé seront toutes sur une courbe parabolique.*

Prenons pour axe des x la droite AX [fig. 69], qui divise en deux parties égales la droite BC joignant les points

donnés et pour axe des y la droite AY parallèle à BC. Cela posé, si nous admettons que les lignes Mm, $M'm'$ soient deux droites consécutives quelconques, leur intersection N sera un point de la courbe cherchée. Soient dans ce cas, $MM' = a$, $mm' = b$; on aura, d'après le système de tracé que l'on vient d'indiquer,

$$AM = za,\ MB = (n-z)a,\ Am = (n-z+1)b,\ Cm = (z-1)b,$$

n étant le nombre des parties égales de AB ou de AC. De plus, si l'on fait $AH = p$, $HB = q$, on trouvera aisément que les coordonnées obliques des points M, m, M', m' sont pour le point M,

$$AP = \frac{zp}{n}, \qquad PM = \frac{zq}{n};$$

pour le point m,

$$Ap = \frac{p(n-z+1)}{n}, \quad pm = \frac{q(n-z+1)}{n};$$

pour le point M',

$$AP' = \frac{(z+1)p}{n}, \qquad P'M' = \frac{(z+1)q}{n};$$

pour le point m',

$$Ap' = \frac{p(n-z)}{n}, \qquad p'm' = \frac{q(n-z)}{n}.$$

De là, la droite Mm, assujettie à passer par les deux points M, m, aura pour équation aux coordonnées obliques

$$y - \frac{zq}{n} = \frac{q(n+1)}{p(2z-n-1)}\left(x - \frac{zp}{n}\right); \qquad (1)$$

l'équation de la droite $M'm'$ sera pareillement

$$y - \frac{(z+1)q}{n} = \frac{q(n+1)}{p(2z-n+1)}\left(x - \frac{(z+1)p}{n}\right). \qquad (2)$$

Maintenant, puisqu'au point d'intersection N les coordon-

nées x, y sont les mêmes pour les droites Mm, $M'm'$, et que les deux équations précédentes sont les seules qui existent entre les trois inconnues x, y, z, il est évident que l'on obtiendra l'équation de la courbe à laquelle appartiennent tous les points N, en éliminant z entre ces deux équations. Afin d'effectuer plus commodément cette élimination, l'on ordonnera par rapport à z les équations dont il s'agit, et l'on aura, toutes réductions faites,

$$(1')\ z^2 - \frac{ny + q(n+1)}{q} z + \frac{npy(n+1) + nqx(n+1)}{2pq} = 0,$$

$$(2')\ z^2 + \frac{q(1-n) - ny}{q} z + \frac{npy(n-1) + nqx(n+1) - 2npq}{2pq} = 0.$$

Or, en soustrayant ces deux résultats l'un de l'autre, on obtient

$$z = \frac{ny + nq}{2q};$$

et en substituant cette valeur dans l'équation (1') on a

$$npy^2 - 2q^2(n+1)x + pq^2(n+2) = 0. \qquad (3)$$

Donc la courbe cherchée est une parabole; et son diamètre coïncide évidemment avec l'axe des x, puisque l'ordonnée y n'entre qu'à la seconde puissance dans cette équation.

Si l'on prenait le point H pour origine des coordonnées, et qu'on désignât par x' la nouvelle abscisse, on aurait, à cause de $x = p + x'$,

$$(3') \qquad npy^2 - 2q^2(n+1)x' - pq^2 n = 0;$$

faisant ici $y = 0$, l'abscisse de l'extrémité du diamètre serait

$$x' = \frac{-pn}{2(n+1)}.$$

La plus petite valeur admissible de n est 2, auquel cas

$x' = \frac{-p}{3}$, et n peut croître depuis ce terme jusqu'à l'infini : or, à cette dernière limite, on a $x' = \frac{-p}{2}$; ainsi, la parabole qui a le plus grand paramètre répond à $n = 2$, et celle qui aurait le plus petit paramètre répondrait à $x' = \frac{-p}{2}$, ou à $n = \infty$. Jamais, par la méthode graphique exposée, on ne pourra obtenir cette parabole limite; mais on en approchera d'autant plus, que AB et AC contiendront plus de parties. Pour connaître l'usage de ce tracé, *voyez* le n° 182 de mon *Traité de Topog.*, 2e édit.; et un Mémoire de M. Brianchon, inséré dans le journal de l'École Polytechnique, 19e cahier, tome XII.

PROBLÈME.

96. *Trouver le lieu du sommet d'un triangle dont la base est donnée, et dont les deux angles adjacens ont une différence donnée.*

[Fig. 70.] La base $AB = a$ du triangle AMB est donnée, ainsi que la différence δ des angles inconnus $MAB = A$, $MBA = B$. On demande la nature de la courbe sur laquelle sont situés les sommets M de tous les triangles que l'on peut construire avec les mêmes données.

Soient x, y les coordonnées rectangles du point M, et A l'origine des axes.

Puisque $\delta = A - B$, on a $\tang \delta = \frac{\tang A - \tang B}{1 + \tang A \tang B}$; mais à cause de $\tang A = \frac{y}{x}$, et de $\tang B = \frac{y}{a - x}$, cette expression de $\tang \delta$ se change en celle-ci :

$$\tang \delta = \frac{y(a - x) - xy}{(a - x)x - y^2};$$

d'où

$$y^2 + \frac{2}{\tang \delta} xy - x^2 - \frac{a}{\tang \delta} y + ax = 0. \qquad (1)$$

Si l'on compare cette équation avec l'équation générale des courbes du second ordre,

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F, \qquad (2)$$

on verra d'abord que la condition $4AC - B^2 < 0$ est satisfaite : en effet, l'on a $4AC - B^2 = -\frac{4}{\tang \delta}$. La courbe cherchée est donc une hyperbole.

Il est facile de déduire de l'équation (2) celle des asymptotes, qui est

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\left[x\sqrt{B^2 - 4AC} + \frac{BD - 2AE}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right]; \text{ (*)}$$

par conséquent, l'équation (1) fournira, dans la même circonstance,

$$y = -\frac{x}{\tang \delta} + \frac{a}{2 \tang \delta} \pm \tfrac{1}{2}\left(\frac{2x - a}{\tang \delta}\right)\sqrt{1 + \tang^2 \delta}. \qquad (3)$$

Toute la partie rationnelle de ce résultat étant l'équation d'un diamètre, c'est-à-dire

$$y = -\frac{x}{\tang \delta} + \frac{a}{2 \tang \delta}, \qquad (4)$$

on aura l'abscisse du centre de l'hyperbole, en faisant

$$\pm \tfrac{1}{2}\left(\frac{2x - a}{\tang \delta}\right)\sqrt{1 + \tang^2 \delta} = 0;$$

ce qui donnera

$$x = \frac{a}{2};$$

puis mettant cette valeur dans l'équation (4), on trouvera, pour l'ordonnée de ce centre,

$$y = 0.$$

(*) *Voyez* d'ailleurs sur ce sujet les nos 240 et 243 de l'*Essai de Géométrie analytique* par M. Biot, ou la *Théorie des Courbes* de M. Boucharlat, page 225.

Ainsi, ce point est le milieu même de la droite a. Ce procédé revient évidemment à combiner les équations (3) des deux asymptotes pour en déduire les valeurs des coordonnées de leur point d'intersection.

Il reste à déterminer la direction de ces droites. Pour cet effet, on cherchera les coordonnées des points où elles coupent l'axe des y, en faisant $x = 0$ dans l'équation (3), et on aura, en désignant par y', y'' les deux valeurs résultantes de y,

$$y' = \mathrm{AG} = \frac{a}{2 \tang \delta} + \tfrac{1}{2} \frac{a}{\sin \delta},$$

$$y'' = \mathrm{AH} = \frac{a}{2 \tang \delta} - \tfrac{1}{2} \frac{a}{\sin \delta}:$$

les droites KG, KH déterminées de cette manière sont donc les asymptotes cherchées. Il est remarquable qu'en multipliant entre elles ces deux valeurs, on obtient..... $\frac{a^2}{4} = \overline{\mathrm{AK}}^2$; donc l'angle GKH des asymptotes est droit; donc l'hyperbole cherchée est équilatère.

Mais quel est l'angle qu'une de ces lignes forme avec l'axe des x? La réponse est facile à faire; car on a

$$\tang \mathrm{BKH}' = \frac{\mathrm{BH}'}{\mathrm{BK}} = \frac{1}{\sin \delta} - \frac{1}{\tang \delta} = \tang \tfrac{1}{2} \delta:$$

donc l'angle BKH′ est égal à la moitié de la différence δ des angles A et B.

Newton, après être parvenu aux mêmes conséquences, par une méthode de calcul qui lui est propre (*Arith. Univ.*, prob. 41), imagina, pour donner la solution la plus simple possible de ce problème, de prendre les asymptotes mêmes pour les axes des coordonnées; mais ce grand génie n'aurait peut-être pas eu une pareille idée, si l'analyse ne la lui eût fournie.

PROBLÈME.

97. *Deux cercles étant donnés de grandeur et de position sur un plan, trouver le lieu des centres de tous les cercles qui sont tangens à la fois aux deux cercles donnés.*

[Fig. 71.] Supposons que le cercle cherché enveloppe les deux cercles donnés, et nommons x, y les coordonnées du centre du premier cercle, z son rayon, a la distance AA′ des centres des deux autres, r et r' les rayons de ces cercles.

Il suit de la propriété des triangles rectangles APM, A′PM, que l'on a d'une part

$$x^2 + y^2 = (z - r)^2, \qquad (1)$$

et de l'autre,

$$y^2 + (a - x)^2 = (z - r')^2. \qquad (2)$$

Développant ces équations, elles deviennent

$$z^2 - 2rz + r^2 = x^2 + y^2,$$
$$z^2 - 2r'z + r'^2 = a^2 - 2ax + y^2 + x^2.$$

Or, si on les comparait avec les formules du second degré,

$$z^2 + Pz + Q = 0,$$
$$z^2 + P'z + Q' = 0,$$

qui, comme l'on sait, donnent pour résultat final,

$$(P - P')(PQ' - QP') + (Q - Q')^2 = 0, \qquad (A)$$

on arriverait aisément à l'équation de la courbe cherchée; mais il est encore plus simple de procéder de la manière suivante.

Soustrayant l'une de l'autre les équations (1) et (2), on a

$$z = \frac{2ax - a^2 + r'^2 - r^2}{2(r' - r)},$$

et ajoutant ici $-r$ de part et d'autre, on obtient

$$z - r = \frac{2ax - a^2 + (r - r')^2}{2(r' - r)};$$

puis introduisant cette valeur dans l'équation (1), il vient

$$4(r - r')^2 y^2 + 4[(r - r')^2 - a^2]x^2 - 4a[(r - r')^2 - a^2]x$$
$$= [(r - r')^2 - a^2]^2. \quad (A')$$

Cette équation est celle de l'hyperbole, parce que les coefficiens de x^2 et de y^2 sont de signes contraires. En effet, à cause de $r - r' < a$, on a $4(r - r')^2 < 4a^2$.

Mais lorsque $r - r' = a$, ce qui est dans le cas de la fig. 72, l'équation de la courbe hyperbolique devient, en y faisant les réductions convenables, $y = 0$. Ce résultat étant indépendant de x, il en résulte qu'à tous les points de l'axe des abscisses, l'ordonnée du centre cherché est nulle.

De même, si $r = r'$, l'équation de l'hyperbole devient

$$x^2 - ax = -\frac{a^2}{4},$$

et l'on tire de là,

$$x = \frac{a}{2};$$

ce qui indique, comme on devait bien s'y attendre, que, quelle que soit l'ordonnée y, l'abscisse est toujours constante. Enfin, si les cercles donnés de grandeur et de position étaient tels que l'on eût $r - r' > a$, la courbe cherchée serait une ellipse.

Nous ne laisserons point ignorer que l'on peut plus promptement découvrir la nature de la courbe cherchée, car puisque, d'un côté, l'on a $AM = z - r$ [fig. 71], et de l'autre $A'M = z - r'$, il s'ensuit que

$$AM - A'M = (z - r) - (z - r') = r' - r.$$

Ce résultat se trouvant délivré du rayon du cercle cherché, l'on en doit conclure que la différence des rayons vecteurs AM, A'M est toujours constante, soit que le cercle cherché

enveloppe les cercles donnés, soit qu'il les laisse tous deux au-dehors. La courbe des centres en question est donc une hyperbole, qui a pour foyers les centres mêmes des cercles donnés, et pour grand axe la différence de leurs rayons.

On peut en outre obtenir les sommets des hyperboles opposées, sans être obligé de recourir à la transposition des axes : en effet, au point où l'hyperbole coupe l'axe des abscisses, l'ordonnée est nulle; faisant donc $y = 0$ dans l'équation (A′), et divisant tout par le coefficient de x^2, on aura,

$$x^2 - ax = \frac{[(r-r')^2 - a^2]^2}{4[(r-r')^2 - a^2]} = \frac{(r-r')^2 - a^2}{4}.$$

Cette équation étant résolue par rapport à x, on obtiendra

$$x = \frac{a}{2} \pm \left(\frac{r-r'}{2}\right).$$

Comme la première valeur de x répond à l'abscisse AS′, et la seconde valeur à l'abscisse AS, le grand axe SS′ de l'hyperbole sera égal à $r - r'$, et le centre O sera situé au milieu de la distance AA′. De plus, la branche hyperbolique πSQ sera celle sur laquelle sont situés les centres des cercles enveloppans, tandis que la branche π'S′Q′ renfermera les centres de tous les cercles qui laissent les cercles donnés au-dehors.

Rien n'est plus facile que de se rendre compte des autres particularités du problème, et d'appliquer cette solution à la recherche d'un cercle qui en touche trois autres; puisque ce cercle doit avoir son centre à l'intersection des courbes qui contiennent les centres des cercles mobiles formant contact avec les cercles donnés pris deux à deux. Toutefois, le procédé exposé à cet égard au n° 85, est de beaucoup préférable à ce dernier, à cause de son extrême simplicité.

PROBLÈME.

98. *Trouver la nature de la courbe qui renferme tous les points desquels menant deux tangentes à une parabole donnée, ces tangentes forment entre elles un angle donné.*

[Fig. 73.] Désignons respectivement par α, β; α', β', les coordonnées des points de contact M, M′, et par t la tangente de l'angle donné.

L'équation de la parabole sera

$$\beta^2 = p\alpha, \quad \text{ou} \quad \beta'^2 = p\alpha',$$

p étant le paramètre; et celle de la droite TM assujettie à toucher cette courbe donnée, sera (n° 53)

$$2\beta y = px + \alpha p, \tag{1}$$

en prenant x, y pour les coordonnées courantes.

Pareillement l'équation de la tangente T′M′, assujettie à passer par le point M′ pour lequel P′M′ $= -\beta'$, sera

$$-2\beta' y = px + \alpha' p; \tag{2}$$

mais les coordonnées du point m d'intersection de ces tangentes doivent être les mêmes dans les équations (1) et (2); et ce point m étant situé du coté des abscisses négatives, il faudra, pour avoir égard à cette circonstance, changer x en $-x$; alors les équations ci-dessus deviendront

$$\begin{aligned} 2\beta y &= -px + \alpha p, \\ 2\beta' y &= px - \alpha' p; \end{aligned}$$

et comme des équations $\beta^2 = \alpha p$, $\beta'^2 = \alpha' p$, qui conviennent aux points de contact, on tire ces valeurs

$$\alpha = \frac{\beta^2}{p}, \quad \alpha' = \frac{\beta'^2}{p}, \tag{3}$$

il est clair que l'on a

$$\left.\begin{aligned} 2\beta y &= -px + \beta^2, \\ 2\beta' y &= px - \beta'^2; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

d'où l'on tire

$$\beta = \quad y \pm \sqrt{px + y^2},$$
$$\beta' = -y \pm \sqrt{px + y^2}.$$

D'un autre côté, l'angle $MmM' = MTA + ATM'$; et à cause des équations (3), (4) qui donnent, abstraction faite des signes, ou pour valeurs absolues,

$$A = \frac{p}{2\beta} = \frac{\beta}{2\alpha}; \quad A' = \frac{p}{2\beta'} = \frac{\beta'}{2\alpha'},$$

on a ainsi, d'après le n° 45,

$$t = \frac{A + A'}{1 - AA'} = \frac{2\alpha\beta' + 2\alpha'\beta}{4\alpha\alpha' - \beta\beta'}.$$

Substituant dans ce résultat, pour α et α', leurs valeurs données par les équations (3), on aura, après avoir chassé le dénominateur,

$$4\beta\beta't - p^2t = 2\beta p + 2\beta' p.$$

Mettant en outre dans celle-ci, au lieu de β et β' leurs valeurs obtenues précédemment, il viendra, en divisant tout par p,

$$4tx - pt = 4\sqrt{px + y^2}.$$

Élevant les deux membres au carré, pour faire disparaître le radical, on aura enfin

$$y^2 + \left(\frac{pt^2}{2} + p\right)x - t^2x^2 - \frac{p^2t^4}{16} = 0, \qquad (A)$$

équation à l'hyperbole, puisque sa forme se rapporte évidemment à la formule $A'y^2 - C'x^2 + E'x = M$, qui représente cette courbe (n° 49).

Le moyen de transporter l'origine au centre de l'hyperbole, et de donner par conséquent à l'équation précédente la forme $y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(x'^2 - a^2)$, est de chasser le terme où x se trouve à la première puissance, en mettant $x' + q$ au

lieu de x dans l'équation de la courbe; mais on sait d'ailleurs, par la théorie des équations, qu'en pareil cas, l'on a

$$x = x' + \frac{p}{4} + \frac{p}{2t^2}.$$

La formule (A) deviendra donc, par la substitution de cette valeur,

$$y^2 = t^2 \left[x'^2 - \frac{p^2}{4t^4} (t^2 + 1) \right]. \qquad \text{(B)}$$

Pour trouver le premier demi-axe, on fera, dans ce résultat, $y = 0$, et l'on obtiendra

$$x' = a = \pm \frac{p}{2t^2} \sqrt{t^2 + 1};$$

et pour trouver le second demi-axe, on fera $x' = 0$, ce qui donnera

$$y = b = \pm \frac{p}{2t} \sqrt{t^2 + 1}.$$

Si l'on se rappelle maintenant que, par le calcul des fonctions circulaires, on a

$$\sin m = \frac{\text{tang } m}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 m}},$$

on pourra simplifier l'expression des demi-axes, ainsi qu'il suit : par exemple, en désignant le sinus de l'angle MmM' par f, lorsque sa tangente l'est par t, on conclura, à l'aide de la formule précédente, que

$$\frac{1}{f} = \frac{\sqrt{1 + t^2}}{t},$$

et par suite

$$a = \frac{p}{2tf}, \qquad b = \frac{p}{2f};$$

ainsi l'équation (B) devient

$$y^2 = t^2 \left(x'^2 - \frac{p^2}{4t^2 f^2}\right). \qquad (B')$$

Il suit de là qu'en diminuant les x de la quantité $\frac{1}{4} p + \frac{p}{2 t^2}$, et décrivant une hyperbole dont les axes soient $2a$, et $2b$, cette courbe sera le lieu de l'équation (A).

Dans la solution précédente, on a supposé que l'angle donné MmM' était aigu, et il est visible que lorsqu'il est obtus, sa tangente négative, qui n'entre dans tous les termes de l'équation (A) qu'à la seconde puissance, n'y produit aucun changement. Concluons donc que les deux branches hyperboliques, l'une QR, satisfait au cas où l'angle proposé est aigu, et l'autre Q'R', au cas où cet angle est obtus et supplément du premier.

Enfin, s'il arrivait que l'angle MmM' fût droit, la ligne cherchée serait la directrice même de la parabole, parce qu'alors l'équation (B') donnerait, quelle que fût y, $x' = 0$, et à cause de $x = x' + \frac{1}{4} p + \frac{1}{2} \frac{p}{t^2}$, on aurait dans la même circonstance $x = \frac{1}{4} p$, ce qui exprime la distance du sommet de la courbe à la directrice.

En cherchant, par un procédé analogue, quelle serait la courbe que parcourrait le sommet d'un angle droit dont les côtés toucheraient constamment une ellipse, on trouverait l'équation du cercle; mais cette question particulière est susceptible d'être traitée plus élégamment, ainsi qu'il suit (*).

(*) Si l'angle des deux tangentes à l'ellipse, au lieu d'être droit, était quelconque, on trouverait, par un calcul analogue au précédent, une équation du quatrième degré entre les coordonnées x, y, de laquelle résulteraient les deux courbes fermées qui satisferaient à l'angle donné et à son supplément; mais comme cette équation ne serait pas décomposable en deux facteurs rationnels du second degré, les lieux géométriques cherchés ne pourraient être déterminés que par la discussion immédiate de l'équation dont il s'agit.

PROBLÈME.

99. *Trouver le lieu géométrique du sommet d'un angle droit dont les côtés sont constamment tangens à une courbe du second degré.*

Première solution. Soient x', y'; x'', y'' les coordonnées rectangles des points de contact des tangentes T, T′ avec la courbe du second degré représentée par l'équation

$$Ax^2 + By^2 = 1;$$

on aura entre ces coordonnées les relations

$$\left.\begin{aligned} Ax'^2 + By'^2 &= 1, \\ Ax''^2 + By''^2 &= 1, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

et les équations des deux tangentes T, T′ passant par un point variable x, y, seront

$$\left.\begin{aligned} Ax'x + By'y &= 1, \\ Ax''x + By''y &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

De plus, la condition que ces tangentes soient rectangulaires sera exprimée (n° 42) par

$$A^2x'x'' + B^2y'y'' = 0. \qquad (3)$$

Nous voilà donc parvenus à cinq équations entre les quatre coordonnées $x'y'$, $x''y''$ des points de contact; ainsi l'on conçoit la possibilité d'obtenir une équation dégagée entièrement de ces coordonnées; mais pour employer dans cette circonstance un mode d'élimination facile, on aura égard à ce qui a été démontré au n° 48, savoir, qu'au système d'équations

$$a^2 + b^2 = R^2, \quad a'^2 + b'^2 = R'^2, \quad aa' + bb' = 0$$

correspond cet autre

$$\frac{a^2}{R^2} + \frac{a'^2}{R'^2} = 1, \quad \frac{b^2}{R^2} + \frac{b'^2}{R'^2} = 1, \quad \frac{ab}{R^2} + \frac{a'b'}{R'^2} = 0.$$

Si l'on fait donc

$$Ax' = a, \quad By' = b, \quad Ax'' = a', \quad By'' = b',$$

les équations (1, 3) formeront ce nouveau groupe :

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} &= 1, \\ \frac{a'^2}{A} + \frac{b'^2}{B} &= 1, \\ aa' + bb' &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ou faisant $\quad a^2 + b^2 = R^2, \; a'^2 + b'^2 = R'^2,$

on aura, conformément à la remarque précédente,

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2}{R^2} + \frac{a'^2}{R'^2} &= 1, \\ \frac{b^2}{R^2} + \frac{b'^2}{R'^2} &= 1, \\ \frac{ab}{R^2} + \frac{a'b'}{R'^2} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Cela posé, si l'on ajoute ensemble les carrés des équations (2) divisées respectivement par R et R', et qu'on réduise en vertu de ces dernières relations (5), il viendra

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2}.$$

Si l'on ajoute pareillement les deux premières équations (4) après les avoir divisées respectivement par R^2 et R'^2, on aura, à cause des relations (5),

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B};$$

donc le résultat

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{A} + \frac{1}{B},$$

exprime que le lieu géométrique cherché est un cercle.

Deuxième solution. Il est un autre procédé analytique

non moins élégant qui résout cette question; c'est de rapporter d'abord la courbe du second ordre à des coordonnées rectangulaires qui aient pour axes les deux tangentes T,T'. Pour cet effet, l'on mettra dans l'équation (1) de la courbe, ces valeurs

$$x' = mt + pu + x, \quad y' = nt + qu + y,$$

dans lesquelles x, y désignent comme ci-dessus les coordonnées du point d'intersection des tangentes T, T', point que l'on prend maintenant pour origine des axes; et il viendra

$$\begin{aligned} u^2 (\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2) + t^2 (\mathrm{A}m^2 + \mathrm{B}n^2) \\ + 2tu\,(\mathrm{A}mp + \mathrm{B}nq) \\ + 2u\,(\mathrm{A}px + \mathrm{B}qy) + 2t\,(\mathrm{A}mx + \mathrm{B}ny) \\ + (\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Or, faisant successivement u et $t = 0$, et résolvant les équations restantes, on exprimera que la courbe est rapportée aux axes tangentiels T, T' en écrivant analytiquement que les deux valeurs de t et de u sont égales respectivement, ce qui fournira ces deux équations de condition:

$$(6) \begin{cases} \mathrm{AB}\,(m^2y^2 + n^2x^2 - 2\,mnxy) = \mathrm{A}m^2 + \mathrm{B}n^2, \\ \mathrm{AB}\,(p^2y^2 + q^2x^2 - 2\,pqxy) = \mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2; \end{cases}$$

et comme on a en outre (n° 48) ces relations

$$(7) \qquad m^2 + p^2 = 1, \quad n^2 + q^2 = 1, \quad mn + pq = 0,$$

il est évident qu'en ajoutant les équations (6) terme à terme et opérant les réductions que présentent les relations (7), on obtiendra comme ci-dessus

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\mathrm{A}} + \frac{1}{\mathrm{B}}.$$

Voyez d'autres applications de ce procédé dans un ouvrage très intéressant de M. Lamé, lequel a pour titre : *Examen des différentes méthodes pour résoudre les problèmes de Géométrie* (Paris, 1818).

PROBLÈME.

100. [Fig. 60.] *Trouver un point* M′ *duquel ayant abaissé des perpendiculaires sur les côtés d'un angle donné* MAB, *le quadrilatère qui en résulte soit équivalent à un carré* q^2.

Soient a la tangente de l'angle donné MAB, et x', y' les coordonnées du point M′ cherché.

L'équation de la droite AM qui passe par l'origine A, est

$$y = ax,$$

et celle de la droite MM′ qui lui est perpendiculaire, est

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

Ainsi les coordonnées du point M d'intersection de ces droites seront

$$x = \frac{x' + ay'}{1 + a^2}, \qquad y = \frac{ax' + a^2y'}{1 + a^2}.$$

L'aire du triangle AMM′, exprimée en fonction des coordonnées des sommets de ses angles, est (n° 101. L. C.)

$$\frac{x'(ax' + a^2y') - y'(x' + ay')}{2(1 + a^2)},$$

et l'aire du triangle AP′M′ $= \frac{x'y'}{2}$. Or, comme le quadrilatère AMM′P′ $=$ AMM′ $+$ AM′P′ $= q^2$, il s'ensuit que

$$a^2x'y' + ax'^2 - x'y' - ay'^2 + x'y' + a^2x'y' = 2q^2(1 + a^2);$$

ou, en changeant les signes, réduisant et divisant tout par a,

$$y'^2 - 2ax'y' - x'^2 = -2q^2\left(\frac{1 + a^2}{a}\right). \qquad \text{(A)}$$

Telle est l'équation qu'il faudrait construire pour obtenir le lieu de tous les points M′ qui satisfont à la condition du problème proposé. Si l'on résout cette équation par rapport à y', on aura

$$y' = ax' \pm \sqrt{(1+a^2)\left(x'^2 - \frac{2q^2}{a}\right)};$$

d'où l'on voit que la courbe résultante est une hyperbole qui a son centre au point A, et qu'à cause de la quantité rationnelle ax', la droite AM doit être prise pour un de ses diamètres (n° 111. L. C.). On portera donc parallèlement à l'axe AY, tant au-dessus qu'au-dessous de AM et de Am, des parties égales à $\sqrt{(1+a^2)\left(x'^2 - \frac{2q^2}{a}\right)}$; l'ensemble des points que l'on obtiendra de cette manière déterminera les branches de la courbe à décrire. Nous ne nous étendrons pas davantage sur les détails de cette construction, parce qu'ils ne présentent aucune difficulté; nous remarquerons seulement que si, dans l'équation (A), l'on voulait chasser le terme multiplié par $x'y'$, il faudrait changer la direction des coordonnées, en y faisant (n° 40)

$$x' = mt - nu, \qquad y' = nt + mu;$$

et, dans ce cas, l'équation résultante serait celle de l'hyperbole rapportée à ses axes.

Lorsque a est infinie, ou, ce qui est de même, lorsque l'angle donné MAB est droit, l'équation (A) se réduit à $x'y' = q^2$, parce que tous les termes sans a sont nuls par rapport à ceux qui en renferment; mais si l'on veut éviter la considération de l'infini, on fera $a = \frac{\sin A}{\cos A}$, et l'équation (A) deviendra, par la substitution de cette valeur, et après avoir chassé le dénominateur cos A,

$$\cos A y'^2 - 2 \sin A x y' - \cos A x'^2 = -2q^2 \left(\frac{1}{\sin A}\right).$$

L'angle MAB étant droit, on a $\cos A = 0$, et $\sin A = 1$; ainsi, l'équation précédente se réduit à

$$x'y' = q^2;$$

c'est celle de l'hyperbole équilatère entre ses asymptotes AX, AY.

Enfin, si l'angle est plus grand qu'un quadrant, sa tangente a devient négative, et l'équation (A), qui appartient encore à l'hyperbole, se change en

$$y'^2 + 2ax'y' - x'^2 = 2q^2\left(\frac{1 + a^2}{a}\right).$$

Il y a plusieurs moyens de rendre le problème actuel déterminé; par exemple, il le serait, si la perpendiculaire MM′ devait être tangente à un cercle donné de grandeur et de position, et que toutes choses fussent égales d'ailleurs comme précédemment; mais alors le carré q^2 ne pourrait excéder certaines limites.

PROBLÈME.

101. [Fig. 74.] *Deux cercles* AB, A′B′ *étant donnés de grandeur et de position sur un plan, et ayant mené par un point quelconque* C′ *du cercle* A′B′ *une tangente indéfinie* C′T, *qui coupe l'autre cercle* AB *en deux points* m, m′, *par lesquels soient menées à celui-ci les tangentes* mM, m′M; *on demande la nature de la ligne sur laquelle sont situés tous les points de concours* M.

Soient α et β les coordonnées rectangles du point M cherché; rayon AB $= r$, rayon A′B′ $= r'$; et désignons par a la distance AA′ des deux centres.

La corde joignant les points de contact m, m' des deux tangentes au cercle AB, qui se rencontrent en un point M dont les coordonnées variables sont α, β, a pour équation

(1) $$\beta y + \alpha x = r^2,$$

puisque celle du cercle dont il s'agit est

(2) $$x^2 + y^2 = r^2.$$

Cette corde coupe l'axe des x en un point T dont l'abscisse $AT = x_1$ se trouve, en faisant $y = 0$ dans l'équation (1) : ainsi l'on a

$$x_1 = \frac{r^2}{\alpha};$$

et elle fait avec ce même axe un angle T dont la tangente tabulaire a pour expression, abstraction faite du signe,

$$\text{tang T} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Or, par une formule de Trigonométrie,

$$\sin T = \frac{\text{tang T}}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 T}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}};$$

et parce que la corde mm' prolongée doit être tangente au cercle A'B', le triangle rectangle AC'T donne (n° 3)

$$A'T = a + x_1 = \frac{r'}{\sin T};$$

ou substituant pour x_1 et $\sin T$ leurs valeurs précédentes, on a

$$x_1 = \frac{r'\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha} - a = \frac{r^2}{\alpha}.$$

Réduisant au même dénominateur, chassant le radical, et faisant passer tous les termes dans un même membre, il vient enfin,

$$\beta^2 + \left(\frac{r'^2 - a^2}{r'^2}\right)\alpha^2 - \frac{2ar^2}{r'^2}\alpha - \frac{r^4}{r'^2} = 0.$$

Telle est l'équation de la courbe d'intersection des tan-

gentes mM, $m'M$, dont le lieu est une parabole, une ellipse ou une hyperbole, selon que r' est égal ou plus grand, ou moindre que a.

PROBLÈME.

102. *Si deux sécantes à une courbe du second ordre partent d'un même point fixe, et qu'on joigne par des droites les extrémités réciproques des cordes résultantes, quel sera le lieu géométrique de l'intersection de ces nouvelles sécantes?*

Les considérations analytiques qui paraissent conduire par la voie la plus directe et la plus simple à la solution de ces sortes de problèmes, et qui ont une grande généralité, sont fondées sur ce que l'ensemble de deux droites partant d'un même point α, β peut être représenté par une seule équation du second degré de la forme suivante :

$$(y-\beta)^2 + A(x-\alpha)(y-\beta) + B(x-\alpha)^2 = 0,$$

lorsqu'on transporte l'origine des coordonnées à leur point d'intersection (n° 50), et qu'en combinant ainsi plusieurs couples de lignes droites avec des courbes du second degré qui ont avec elles des points communs, les éliminations se présentent en moindre nombre et s'effectuent plus facilement : c'est ce que l'on a déjà vu au n° 62.

Représentons par

$$y^2 = px + qx^2 \qquad (1)$$

l'équation de la courbe du second degré, ARR' (fig. 98); par

$$(y-\beta)^2 + A(x-\alpha)(y-\beta) + B(x-\alpha)^2 = 0, \qquad (2)$$

le système des deux sécantes MR', Mr', menées par le point fixe M dont les coordonnées sont α, β; et par

$$(y-\beta')^2 + A'(x-\alpha')(y-\beta') + B'(x-\alpha')^2 = 0, \qquad (3)$$

le système des deux autres sécantes M'r, M'r', menées par

les extrémités des cordes RR′, rr', et se coupant en un point M′ dont les coordonnées variables sont α', β'.

Toutes ces lignes ayant des points communs, les variables x, y doivent avoir les mêmes valeurs dans les trois équations précédentes; et il est évident qu'en multipliant (2) et (3) respectivement par les deux constantes arbitraires m, m', la somme de ces produits peut être considérée comme identique à l'équation (1); ce qui fournira entre les six constantes arbitraires A, A′, B, B′, m, m', les six relations

$$m + m' = 1, \quad Am + A'm' = 0, \quad Bm + B'm' = -q,$$
$$2m\beta + 2m'\beta' + Am\alpha + Am'\alpha' = 0,$$
$$2Bm\alpha + 2B'm'\alpha' + Am\beta + A'm'\beta' = p,$$
$$m\beta^2 + m'\beta'^2 + Bm\alpha^2 + B'm'\alpha'^2 + Am\alpha\beta + A'm'\alpha'\beta' = 0.$$

Le moyen d'obtenir une nouvelle équation indépendante de la direction des deux sécantes MR′, Mr′, est d'éliminer A, A′, B, B′. Or, à cause de $A'm' = -Am$, et de..... $B'm' = -(q + Bm)$, les trois dernières relations ci-dessus deviennent

$$2(m\beta + m'\beta') + Am(\alpha - \alpha') = 0,$$
$$2Bm(\alpha - \alpha') + Am(\beta - \beta') - (2\alpha' q + p) = 0,$$
$$m\beta^2 + m'\beta'^2 + Bm(\alpha^2 - \alpha'^2) + Am(\alpha\beta - \alpha'\beta') - q\alpha'^2 = 0.$$

Multipliant respectivement les deux premières de ce nouveau système par $(\beta + \beta')$ et $(\alpha + \alpha')$; puis soustrayant la somme des deux produits résultans, de la troisième relation, on aura pour reste

$$(m + m')\beta\beta' - (\alpha' q + \tfrac{1}{2}p)(\alpha + \alpha') + q\alpha'^2 = 0,$$

ou réduisant et remarquant que $m + m' = 1$, il viendra définitivement

$$\beta\beta' - q\alpha\alpha' = \tfrac{1}{2}p(\alpha + \alpha'). \qquad (4)$$

Ainsi, le lieu géométrique, dont les coordonnées courantes sont α', β', est une droite; et lorsque le point fixe M est, comme

dans la figure, extérieur à la courbe ARR′, cette droite joint les points de contact des deux tangentes menées par ce point à cette même courbe (n° 55).

De là la possibilité de mener, avec le secours de la règle seulement, une tangente à une courbe du second ordre par un point extérieur.

Voyez sur cette théorie des transversales, l'*Examen des différentes méthodes pour résoudre les problèmes de Géométrie*, par M. Lamé.

PROBLÈME.

103. *Inscrire une ellipse dans un triangle, de manière qu'un de ses diamètres soit situé sur la ligne qui passe par le sommet et par le milieu de la base de ce triangle.*

[Fig. 75.] Le grand diamètre AB étant pris sur la ligne AT qui passe par le milieu de la base GH et par le point T, le petit diamètre CD sera nécessairement parallèle à la tangente GH, et les points de contact M, M′ seront aux extrémités de la double ordonnée MM′; parce qu'à une même abscisse correspondent deux ordonnées égales, et que les tangentes qui leur sont relatives, se rencontrent sur le prolongement du diamètre.

Cela posé, faisons $GH = 2m$, $AG = m$, $AT = n$, le diamètre $AB = 2a'$, son conjugué $CD = 2b'$; et désignons par α, β les coordonnées OP, PM du point M.

L'équation de l'ellipse, relativement à ses diamètres, est

$$a'^2u^2 + b'^2t^2 = a'^2b'^2,$$

t étant considérée comme l'abscisse prise sur AB, et u comme l'ordonnée correspondante. Cette équation deviendra, pour le point M,

$$a'^2\beta^2 + b'^2\alpha^2 = a'^2b'^2. \qquad (1)$$

De plus, les points T, M, H étant sur une même droite,

les rapports $\frac{AH}{AT}$ et $\frac{PM}{PT}$, sont nécessairement égaux; ainsi, en employant la notation algébrique, on a

$$\frac{m}{n} = \frac{\beta}{n - a' - \alpha};$$

d'où l'on tire

$$\beta = \frac{(n - a' - \alpha)m}{n}. \qquad (2)$$

Enfin, pour exprimer que les lignes GT, TH sont en contact avec l'ellipse, on aura

$$\text{soutangente PT} = \frac{a'^2 - \alpha^2}{\alpha} = n - a' - \alpha. \qquad (3)$$

Ces trois équations renfermant une inconnue de plus, le problème demeure indéterminé; c'est-à-dire qu'il existe une infinité d'ellipses qui jouissent de la propriété énoncée. Mais ce problème serait restreint à une seule solution, si l'on ajoutait cette condition, que l'ellipse à décrire doit toucher le milieu du côté HT; car alors on a

$$\alpha = \frac{n}{2} - a',$$

et l'équation (2) devenant, par le moyen de cette valeur, $\beta = \frac{m}{2}$, il s'ensuit que les équations (1) et (3) se changent respectivement en

$$a'^2 m^2 + b'^2 (n - 2a')^2 = 4a'^2 b'^2, \qquad (1')$$

et

$$n = 3a'. \qquad (3')$$

Cette dernière donnant $a' = \frac{n}{3}$, la précédente fournira

$$m^2 + b'^2 = 4b'^2, \text{ et par conséquent } b' = \sqrt{\frac{m^2}{3}} = \text{OD}.$$

Le second demi-diamètre est donc moyen proportionnel entre $\frac{m}{3}$ et m; ou bien à cause de $OK = \frac{2m}{3}$ et de $PM = \frac{m}{2}$, ce même demi-diamètre est moyen proportionnel entre OK et PM.

D'un autre côté, puisque $a' = \frac{n}{3}$, le centre O de l'ellipse se trouve nécessairement sur la ligne HM′ qui aboutit au milieu de GT : c'est une conséquence immédiate du théorème (n° 61.)

Il est clair que si le triangle donné GTH était isoscèle, les lignes AB, CD devraient être prises pour les axes mêmes de l'ellipse. On voit en outre que si ce triangle était équilatéral, on aurait $n = \sqrt{3m^2}$, et $AO = \frac{n}{3} = \sqrt[4]{\frac{m^2}{3}}$, en même temps que l'on a $OD = \sqrt{\frac{m^2}{3}}$; ainsi dans ce cas l'ellipse dégénère en cercle, comme on devait bien s'y attendre.

Ces valeurs particulières de a' et b' se déduiraient non moins facilement des expressions générales; car il est aisé de trouver que

$$a' = \frac{(m-\beta)\,n}{2m-\beta}, \quad b' = m\sqrt{\frac{\beta}{2m-\beta}}.$$

Il est remarquable que l'ellipse, décrite suivant les conditions qui viennent d'être énoncées, est la plus grande de toutes celles qui sont inscriptibles dans le triangle GHT.

PROBLÈME.

104. [Fig. 76.] *Décrire une courbe du second ordre qui passe par un point donné* M′, *et qui soit tangente aux côtés d'un angle* MT m, *en deux points donnés* m, M.

Supposons que la courbe soit une ellipse. Joignez m M′,

et par le milieu P de cette ligne, tirez PT qui sera soutangente par rapport aux demi-diamètres conjugués AB′, AC′ formant entre eux un angle représenté par TPM; désignez par

$$\left.\begin{matrix}\alpha, \beta, \\ \alpha', \beta',\end{matrix}\right\} \text{ les coordonnées des points } \left\{\begin{matrix}\text{M}, \\ \text{M}',\end{matrix}\right.$$

comptées à partir du centre A.

Soit de plus

$$\text{AB}' = a', \ \text{AC}' = b', \ \text{PT} = m, \ \text{PP}' = n.$$

L'équation de l'ellipse, par rapport à ses diamètres, est

$$a'^2u^2 + b'^2t^2 = a'^2b'^2.$$

Or, pour les points M, M′ donnés, elle prendra la forme

$$\alpha'^2\beta'^2 + b'^2(\alpha' + n)^2 = a'^2b'^2, \qquad (1)$$

et

$$a'^2\beta^2 + b'^2\alpha'^2 = a'^2b'^2. \qquad (2)$$

L'expression de la soutangente PT ou m, est pour l'abscisse $\alpha' + n$ ou AP,

$$m = \frac{a'^2 - (\alpha' + n)^2}{(\alpha' + n)}; \qquad (3)$$

et des équations (1) et (2), l'on obtient,

$$b'^2 = \frac{a'^2\beta^2}{a'^2 - (\alpha' + n)^2}, \quad b'^2 = \frac{a'^2\beta'^2}{a'^2 - \alpha'^2};$$

égalant ces deux valeurs, l'on a, après la simplification nécessaire,

$$\beta^2(a'^2 - \alpha'^2) = \beta'^2[a'^2 - (\alpha' + n)^2];$$

et parce que l'équation (3) donne

$$a'^2 = m(\alpha' + n) + (\alpha' + n)^2,$$

on aura, en mettant cette valeur dans l'équation précédente,

$$\beta^2 m\alpha' + \beta^2 mn + 2\beta^2\alpha' n + \beta^2 n^2 = \beta'^2 m\alpha' + \beta'^2 mn,$$

d'où l'on tire

$$\alpha' = \frac{(\beta'^2 - \beta^2)\, mn - \beta^2 n^2}{2\,\beta^2 n - (\beta'^2 - \beta^2)\, m},$$

et par conséquent AP ou

$$\alpha' + n = \frac{\beta^2 n^2}{2\,n\beta^2 - (\beta'^2 - \beta^2)\, m}. \qquad (A)$$

Maintenant que $\alpha' + n$ est connue, la valeur de α' déduite de l'équation (3) sera exprimée par

$$\sqrt{m(\alpha' + n) + (\alpha' + n)^2},$$

et l'équation (1) donnera, pour l'expression du second demi-diamètre b',

$$\frac{\alpha'\beta}{\sqrt{a'^2 - (\alpha' + n)^2}}.$$

Les deux demi-diamètres conjugués étant connus, l'on pourra déterminer la grandeur des demi-axes de l'ellipse, et leur position à l'égard des diamètres. Quoique le calcul qu'exige cette détermination ne soit rien moins que difficile, nous l'entreprendrons en faveur de quelques lecteurs; mais auparavant tirons quelques conséquences des résultats que nous venons d'obtenir.

Il peut arriver d'abord que les points m, M soient également éloignés de T, en même temps que $a' = b'$; or, si ces deux circonstances ont lieu à la fois, l'angle TPM sera droit, et la courbe elliptique se changera en circonférence de cercle. Il suit de là que

$$a'^2 = b'^2 = \frac{a'^2\beta^2}{a'^2 - (\alpha' + n)^2},$$

c'est-à-dire,

$$a'^2 = (\alpha' + n)^2 + \beta^2.$$

D'ailleurs $a'^2 = m(\alpha' + n) + (\alpha' + n)^2$; ainsi de ces deux valeurs on conclura

$$\alpha' + n = \frac{\beta^2}{m}.$$

Egalant en outre celle-ci avec la valeur (A) obtenue plus haut, il en résultera PT ou.

$$m = \frac{2\beta^2 n}{n^2 + \beta'^2 - \beta^2}.$$

Telle est la hauteur qui convient au triangle isocèle, pour que la courbe à décrire soit un cercle.

Si, dans l'expression générale de $\alpha' + n = \mathrm{AP}$, donnée par l'équation (A), on avait $2n\beta^2 = (\beta'^2 - \beta^2)\, m$, ou $m = \frac{2n\beta^2}{\beta'^2 - \beta^2}$, cette expression serait infinie, de même que les valeurs de a' et de b'; ainsi l'ellipse deviendrait une parabole. Quant au sommet B′ de cette dernière courbe, on le déterminera en prenant $\mathrm{TB}' = \frac{m}{2}$, parce que dans la parabole la soutangente PT est double de l'abscisse PB′, l'origine des coordonnées étant rapportée au point B′. De plus, l'équation de cette courbe, pour le point M, et par rapport au diamètre AB′, est $\beta^2 = \frac{p'm}{2}$, p' étant le paramètre. Par conséquent pour un point quelconque, on a

$$y'^2 = \frac{2\beta^2}{m}\, x'.$$

Enfin, si dans l'équation (A), $2\, n\beta^2 < (\beta'^2 - \beta^2)\, m$, ou $m > \frac{2n\beta^2}{\beta'^2 - \beta^2}$, le centre de la courbe cherchée sera situé à l'opposé de AP, c'est-à-dire en A′; et pour lors cette courbe sera une hyperbole, dont on déterminera les demi-axes au moyen des demi-diamètres conjugués. Voici à ce sujet le développement des calculs auxquels l'ellipse donne lieu.

105. *Les deux diamètres conjugués d'une ellipse étant donnés avec l'angle qu'ils forment entre eux, trouver les deux demi-axes.*

Il a été démontré (n°s 146 et 147. L. C.) qu'entre les

deux demi-axes a, b, et les deux demi-diamètres conjugués a', b' on a ces deux relations :

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$$
$$ab = a'b'\int,$$

$\int$ exprimant le sinus de l'angle formé par les diamètres conjugués.

Si l'on ajoute à la première, et si l'on soustrait de celle-ci le double de la seconde, on aura,

$$a^2 + b^2 + 2ab = a'^2 + b'^2 + 2a'b'\int,$$
$$a^2 + b^2 - 2ab = a'^2 + b'^2 - 2a'b'\int;$$

extrayant la racine carrée, il vient,

$$a + b = \sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b'\int},$$
$$a - b = \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\int},$$

d'où l'on tire sur-le-champ,

$$2a = \sqrt{(a'^2 + b'^2 + 2a'b'\int)} + \sqrt{(a'^2 + b'^2 - 2a'b'\int)},$$
$$2b = \sqrt{(a'^2 + b'^2 + 2a'b'\int)} - \sqrt{(a'^2 + b'^2 - 2a'b'\int)}.$$

Ces quantités radicales se construisent commodément par le moyen du triangle obliquangle; car le premier radical se rapporte au triangle dont la perpendiculaire tombe au-dehors, et le second radical, au triangle dont la perpendiculaire tombe au-dedans.

[Fig. 77.] Soit pour cet effet abaissée de l'extrémité C′ du diamètre, la perpendiculaire C′P sur son conjugé AB′, et soit prolongée C′P de la quantité C′D = AB′; on aura pour l'expression du premier radical,

$$AD = \sqrt{\overline{AC'}^2 + \overline{C'D}^2 + 2C'D \times PC'}$$
$$= \sqrt{b'^2 + a'^2 + 2a'b'\int}.$$

Soit en outre C′PD′ = AB′ on aura pour l'expression du second radical

$$AD' = \sqrt{\overline{AC'}^2 + \overline{C'D'}^2 - 2C'B' \times PC'}$$
$$= \sqrt{b'^2 + a'^2 - 2a'b'f}.$$

Le reste de l'opération n'a plus maintenant aucune difficulté.

Quant à l'angle C'AB, voici comment on le déterminera : on tirera des équations,

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2n^2 + b^2m^2}, \qquad m^2 + n^2 = 1, \qquad (1)$$

obtenues dans le (n° 146, L. C.), la valeur de n; c'est-à-dire, qu'en mettant pour m^2 sa valeur $1 - n^2$ dans la première équation, on aura

$$\sin C'AB = n = \frac{b}{a'}\sqrt{\frac{a^2 - a'^2}{a^2 - b^2}}.$$

Il en résulterait de même pour l'angle BAB',

$$\sin BAB' = q = \frac{b}{b'}\sqrt{\frac{a^2 - b'^2}{a^2 - b^2}}.$$

Il existe un moyen d'obtenir les angles $C'AB = \theta$, $B''AB = \theta'$ indépendamment des demi-diamètres conjugués: en effet, l'équation de condition $a^2nq + b^2mp = 0$, trouvée au n° 140 (L. C.), pouvant être écrite ainsi,

$$\tang\theta \tang\theta' = \frac{-b^2}{a^2};$$

parce que θ a pour sinus n, et θ' pour sinus q; il suffira alors de combiner cette équation avec cette autre :

$$\tang(\theta' - \theta) = k, \text{ ou } \frac{\tang\theta' - \tang\theta}{1 + \tang\theta\tang\theta'} = k,$$

dans laquelle $\theta' - \theta$, qui est l'angle donné B''AC', a une tangente connue k.

On procéderait d'une manière analogue pour l'hyperbole; mais, dans ce cas, les valeurs de a et de b sont plus

compliquées que celles qui conviennent à l'ellipse, et ne sont pas susceptibles d'une construction aussi simple. Ceux qui voudront connaître la solution du problème inverse de celui-ci pourront consulter les *Elémens de Géométrie analytique* par M. Garnier, page 222. Mais nous ne saurions trop le répéter, on ne peut bien se fortifier dans l'analyse qu'en cherchant à vaincre soi-même les difficultés qu'elle présente.

PROBLÈME.

106. [Fig. 78.] *Trouver l'équation de la courbe* DM'Q *dont la propriété est telle que, menant d'un point fixe* A *donné de position par rapport à une ligne* CB, *des droites* AD, AM' *à tous ses points, chacune des parties* CD, MM' *de ces lignes soit d'une grandeur donnée* d.

Prenez pour coordonnées du système les droites AX, AY respectivement parallèles et perpendiculaires à la droite CB donnée; et soient

$$AC = b, \qquad CD = d,$$
$$AP' = x', \qquad PM' = y'.$$

L'équation de la droite AM est $y = Ax$, ou $y = \frac{y'}{x'}x$.

Celle de la droite CB, qui est constamment parallèle à AX est $y = b$.

Ces deux équations étant accordées ensemble, donneront pour l'abscisse du point M, $x = \frac{bx'}{y'}$.

D'un autre côté, la distance $AM' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$,

et celle $$AM = \frac{b}{y'}\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Or, à cause de $AM = AM' - MM'$, on aura,

$$AM = \sqrt{x'^2 + y'^2} - d;$$

égalant cette valeur de AM à la précédente, il en résultera

$$\frac{b}{y'}\sqrt{x'^2+y'^2} = \sqrt{x'^2+y'^2} - d,$$

et en chassant les radicaux, on obtiendra pour l'équation demandée,

$$y'^4 - 2by'^3 + b^2y'^2 - d^2y'^2 + x'^2y'^2 - 2by'x'^2 + b^2x'^2 = 0.$$

La courbe à laquelle cette équation donne lieu, se nomme *conchoïde*. *Nicomède*, qui en est l'inventeur, s'en servit pour la résolution du problème de deux moyennes proportionnelles (*Hist. des Math.*, par Montucla, tom. 1. p. 255.). Il est visible que la droite CB est l'asymptote de cette courbe.

Le problème dont nous parlons, et qui fut célèbre dans l'antiquité, est maintenant de peu d'intérêt pour les géomètres: considéré numériquement, sa solution dépend simplement de la résolution d'une équation du 3e degré à deux termes. En voici une solution géométrique.

Soient a, b les deux lignes entre lesquelles on veut insérer les deux moyens proportionnels x, y; on aura

$$a : x :: x : y :: y : b,$$

d'où l'on tire les deux équations suivantes,

$$x^2 - ay = 0, \qquad y^2 - bx = 0, \qquad (1)$$

qui donneraient les lieux de deux paraboles; mais en les ajoutant, on obtient

$$y^2 + x^2 - ay - bx = 0. \qquad (2)$$

Si, donc les axes des coordonnées sont rectangulaires, on aura les lignes x, y cherchées, par les intersections de l'une des paraboles (1), et du cercle dont l'équation est (2). Telle est l'une des solutions géométriques les plus simples que l'on puisse donner à ce sujet.

On voit, par cet exemple, qu'une combinaison bien simple des équations (1) a donné lieu à une autre courbe susceptible d'être employée dans la solution cherchée. On a déjà eu occasion aux nos 85 et 102, de s'assurer qu'il suffit quel-

quefois d'opérer d'une certaine manière sur les formules données immédiatement par les conditions d'un problème, pour en obtenir d'autres qui offrent des constructions simples et élégantes, ou qui applanissent les difficultés de l'élimination.

PROBLÈME.

107. [Fig. 79.] *Trouver l'équation de la courbe* AMC *dont la propriété est telle que, si ayant décrit sur une droite donnée* AB *comme diamètre, le demi-cercle* AM'B, *et ayant élevé par le point* B *la perpendiculaire* BN, *on tire par le point* A *et par un point quelconque* M *de cette courbe, la droite* AMN *qui rencontre en* M' *la demi-circonférence, et en* N *la droite* BN, *on ait toujours* AM = M'N.

Soit la ligne donnée $AB = 2r$, et x' y' les coordonnées du point M de la courbe proposée.

Puisque AM doit être égale à M'N, quel que soit d'ailleurs l'angle NAB, il est clair que l'on aura dans la même circonstance $AP = P'B$; ainsi $AP' = 2r - x'$.

L'équation du cercle étant $y^2 = 2rx - x^2$, lorsque l'origine est au point A de la circonférence; on aura, pour le point M,

$$y^2 = 2r(2r - x') - (2r - x')^2,$$

et l'équation de la droite AN deviendra, pour le même point,

$$y = \frac{y'}{x'}(2r - x').$$

Carrant celle-ci, et égalant son second membre à celui de l'équation précédente, on aura, réduction faite,

$$y'^2(2r - x') - x'^3 = 0.$$

C'est la *cissoïde* dont *Dioclès* fit usage pour résoudre le problème de la *duplication* du cube : problème qui a été

traité au n° 170 de *l'Applicat. de l'Alg. à la Géom.* de M. Lacroix.

Nous parlons de ces espèces de courbes, afin de faire voir que l'analyse s'applique à toutes les questions possibles de Géométrie, et dans la vue de donner une idée des moyens ingénieux que les géomètres anciens avaient imaginés pour résoudre synthétiquement des problèmes qui étaient pour eux d'une grande difficulté, parce que l'Algèbre leur était inconnue.

PROBLÈME.

108. [Fig. 80.] *Quatre règles* AM′, Am′, M′M″, m′M″ *étant attachées ensemble en forme de parallélogramme, de manière qu'elles aient la liberté de tourner autour de leurs angles comme charnières ; et les règles* m′M″, M′M″ *étant alongées des parties* mm′, MM′ *respectivement égales aux règles* Am′, AM′, *déterminer la nature des courbes qui seront decrites par les points* m, M″, *lorsque le système tournant autour du point* A *comme pivot, le point* M *parcourra une courbe connue.*

Soit pris le point fixe A pour origine des coordonnées rectangles AX, AY, et appelons

$$\left.\begin{matrix} X, & Y, \\ Y', & Y', \\ X'', & Y'', \end{matrix}\right\} \text{ les coordonnées des points } \left\{\begin{matrix} M, & \\ M', & x', y', \\ M'', & \end{matrix}\right\} \text{ celles des points } \left\{\begin{matrix} m, \\ m'. \end{matrix}\right.$$

Faisons de plus $AM' = a$, $Am' = a'$.

Première solution. Il résulte d'abord de la construction que les trois points m, A, M sont en ligne droite ; car à cause des parallèles mM'', AM′ et Am′, MM′, les angles mm'A, m'AM′, AM′M sont égaux ; d'où l'on doit conclure que les triangles mm'A, AM′M isoscèles sont nécessairement équiangles. Donc, quelle que soit la position de l'instrument, on aura toujours, entre les trois angles autour du point A, la relation

$$mAm' + m'AM' + M'AM = 2q,$$

q désignant le quadrant ou le quart de la circonférence.

Maintenant, si l'on mène A'M parallèle à AP, et que l'on prolonge les ordonnées P'M', P''M'' jusqu'en N', N'', le sinus de l'angle M'MN' sera exprimé par le rapport..... $\frac{M'N'}{M'M} = \frac{P''M'' - P'M'}{M''M'}$; d'où l'on tire, par l'emploi des valeurs algébriques,

$$a(Y'' - Y') = a'(Y' + Y). \qquad (1)$$

De même le cosinus de l'angle M'MN' aura pour expression, $\frac{N'M}{M'M} = \frac{A'N' - A'N''}{M''M'}$; ainsi,

$$a(X' - X'') = a'(X - X'). \qquad (2)$$

D'un autre côté, le triangle rectangle M'N'M donne cette équation,

$$(Y' + Y)^2 + (X - X')^2 = a^2,$$

qui, étant développée et simplifiée, au moyen de la relation $X'^2 + Y'^2 = a^2$, fournie par le triangle AP'M', se réduit à

$$X^2 + Y^2 - 2XX' + 2YY' = 0. \qquad (3)$$

Cela posé, si l'on résout les équations (1) et (2) par rapport à Y' et X', on aura

$$Y' = \frac{aY'' - a'Y}{a + a'}, \quad X' = \frac{aX'' + a'X}{a + a'}.$$

Ensuite, si on met ces valeurs dans l'équation (3), et dans la relation $X'^2 + Y'^2 = a^2$, il viendra

$$(a - a')(X^2 + Y^2) = 2a(X''X - Y''Y), \qquad (A)$$

$$(a'X + aX'')^2 + (aY'' - a'Y)^2 = a^2(a + a')^2. \qquad (B)$$

On obtient, par rapport aux points m, m', M'', des équations analogues à celles (A), (B), qui sont relatives aux points M, M', M''; et il suffit pour cela de changer dans

celles-ci X en $-x$, Y en $-y$, a en a', *et vice versâ*; ce qui donne

$$(a'-a)(x^2+y^2) = -2a'(X''x - Y''y) \qquad (A')$$
$$(a'X''-ax)^2 + (a'Y''+ay)^2 = a'^2(a+a')^2. \qquad (B')$$

Ce changement est fondé sur ce que les ordonnées x, y sont respectivement dans une situation opposée à celle des coordonnées X, Y, et qu'elles doivent, pour cette raison, être affectées de signes différens. Au reste, on pourra parvenir directement à ces derniers résultats par une marche semblable à celle que nous venons de suivre.

Le système d'équations (A′), (B′) étant, à la différence des signes près, le même que celui qui est désigné par (A), (B), on est en droit de conclure que si le point M parcourt une courbe, le point m en décrit une semblable, et dont le rapport à l'autre est comme $a' : a$. Il est visible en outre, que ces équations, étant jointes avec l'équation de la courbe parcourue par un des points m, M″, M, suffiront pour déterminer la nature des courbes décrites par les deux autres points; car, à cause des six inconnues X, Y, x, y, X″, Y″, et de la coexistence de cinq équations, l'on arrivera toujours, par l'élimination, à une équation entre deux des inconnues que l'on voudra considérer.

Supposons, pour exemple, que le point M parcoure une droite donnée par l'équation $Y = 0$ (c'est, comme l'on sait, l'axe même des abscisses); déterminer la courbe que décrit en même temps le point M″.

Les équations (A), (B) qui se rapportent au mouvement du point M deviendront, en y faisant $Y = 0$,

$$(a-a')X = 2aX'',$$
$$(a'X + aX'')^2 + a^2Y''^2 = a^2(a+a')^2;$$

et en éliminant X de la seconde, au moyen de sa valeur prise dans la première, on aura

$$a^2Y''^2 + \left(aX'' + \frac{2aa'X''}{a-a'}\right)^2 = a^2(a+a')^2,$$

d'où l'on tire, pour équation de l'ellipse décrite par le point M'',

$$(a-a')^2 Y''^2 + (a+a')^2 X''^2 = (a+a')^2 (a-a')^2.$$

Si, dans cette équation, l'on fait $Y''^2 = 0$, on aura l'expression du demi-petit axe de l'ellipse pris sur AX : en y faisant au contraire $X'' = 0$, on obtiendra l'expression du demi-grand axe pris sur AY ; dans le premier cas, l'on a

$$X'' = a - a',$$

et dans le second,

$$Y'' = a + a'.$$

Il suit de là que si les deux axes m, n d'une ellipse sont donnés, on trouvera les longueurs des deux règles a, a', de manière que le point M parcourant une droite, le point M'' décrive en même temps l'ellipse demandée. En effet, l'on aurait

$$m = 2(a+a'), \quad n = 2(a-a');$$

et par suite,

$$a = \frac{m+n}{4}, \quad a' = \frac{m-n}{4}.$$

Ce moyen très simple de décrire l'ellipse par un mouvement continu, est plus commode que celui qui consiste à faire tracer cette courbe par un des points d'une règle dont les extrémités sont assujetties à glisser le long de deux autres règles faisant entre elles un angle quelconque.

Deuxième solution. On peut, au surplus, en s'arrêtant à des considérations particulières, obtenir à moins de frais l'équation de la courbe décrite par le point M'', lorsque le point M parcourt une droite : c'est ce que va prouver l'analyse suivante.

Soient x'', y'' les coordonnées de m'' [fig. 81], et adoptons d'ailleurs la même construction et la même notation que précédemment, en faisant de plus $M'm'' = M'M'' = a'$.

Cela posé, le triangle AM′M étant isoscèle, on a

$$AP' = P'M, \text{ et } AP'' = p''M.$$

D'un autre côté, la courbe CM′B étant évidemment un cercle dont le rayon est AM′, on a entre les coordonnées du point M′ la relation

$$X'^2 + Y'^2 = a^2; \qquad (m)$$

et parce que le sinus de l'angle M′MA $= \frac{Y''}{a + a'} = \frac{Y'}{a}$,

d'où $$Y' = \frac{Y''a}{a + a'};$$

que son cosinus $= \frac{X'}{a} = \frac{X''}{a - a'}$,

d'où $$X' = \frac{aX''}{a - a'};$$

l'équation (m) deviendra

$$\frac{a^2X''^2}{(a - a')^2} + \frac{a^2Y''^2}{(a + a')^2} = a^2;$$

ou bien comme ci-dessus,

$$(a - a')^2Y''^2 + (a + a')^2X''^2 = (a + a')^2(a - a')^2.$$

Il n'est pas difficile de prouver que quel que soit l'angle AM′M, la longueur de la droite MN est toujours égale à $2a$.

Les jeunes mathématiciens, qui cultivent le dessin topographique, verront sans doute avec plaisir que le problème que nous venons de résoudre d'une manière générale, renferme implicitement toute la théorie du pantographe. La nature de cet ouvrage ne nous permet pas d'étendre plus loin ces considérations; mais l'on peut consulter notre *Traité de Topographie, d'Arpentage et de Nivellement*, 2e édit., sur ce qui a rapport à la théorie et à l'usage de cet instrument.

PROBLÈME.

109. *Faire passer une courbe par plusieurs points donnés.*

[Fig. 82.] Soient

$$\left.\begin{matrix}\alpha,\\ \beta,\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha',\\ \beta',\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha'',\\ \beta'',\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha''',\\ \beta''',\end{matrix}\right\} \text{ etc.,}$$

les coordonnées respectives des points connus,

$$M, \qquad M', \qquad M'', \qquad M''.$$

Il est évident que puisque dans l'énoncé du problème rien n'indique l'espèce de courbe qui doit passer par les points que l'on considère, on peut donner à volonté tant de solutions que l'on voudra, en faisant usage des courbes qui soient, ou non, susceptibles d'être exprimées par des équations; mais pour nous arrêter aux solutions les plus aisées à employer, nous observerons avec Lagrange : « Que quoique » le cercle soit, après la ligne droite, la courbe la plus » facile à décrire, elle ne l'est pas par son équation entre » les coordonnées rectangles. Sous ce dernier point de vue, » on peut regarder comme les plus simples les courbes » dont l'ordonnée est exprimée par une fonction entière et » rationnelle de l'abscisse, telle que

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

» Ces sortes de courbes se nomment en général *paraboliques,* » parce que l'on peut les considérer comme une généralisa- » tion de la parabole qui a lieu lorsque l'équation n'a que » les trois premiers termes. On en a déjà vu l'usage dans la » théorie de la composition des équations (n° 172 L. C.); et » leur considération est toujours utile dans la gradation » des courbes, car l'on peut toujours faire passer une courbe » de ce genre par tant de points que l'on voudra d'une » courbe proposée, puisqu'il n'y a qu'à prendre autant de » coefficiens indéterminés A, B, C, D..... que l'on con-

» sidère de points, et déterminer ces coefficiens de manière » que les abscisses et les ordonnées pour ces points soient » données. Or, il est clair que quelle que puisse être la » courbe proposée, la courbe parabolique, ainsi traitée, en » différera d'autant moins, que le nombre des points donnés » sera plus grand, et leur distance moindre. »

En effet, dans la circonstance actuelle, on a entre les coordonnées des points M, M′, M″, M‴, qui appartiennent à la courbe parabolique, les relations

$$\begin{aligned}
\beta &= A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + \ldots \\
\beta' &= A + B\alpha' + C\alpha'^2 + D\alpha'^3 + \ldots \\
\beta'' &= A + B\alpha'' + C\alpha''^2 + D\alpha''^3 + \ldots \\
\beta''' &= A + B\alpha''' + C\alpha'''^2 + D\alpha'''^3 + \ldots
\end{aligned}$$

desquelles on peut tirer, par l'élimination ordinaire au premier degré, les valeurs des coefficiens, A, B, C, D...; mais ces valeurs s'obtiennent encore avec plus de facilité par le procédé suivant.

Si l'on soustrait les équations précédentes l'une de l'autre, on aura

$$\begin{aligned}
\beta' - \beta &= B(\alpha' - \alpha) + C(\alpha'^2 - \alpha^2) + D(\alpha'^3 - \alpha^3) + \ldots \\
\beta' - \beta'' &= B(\alpha'' - \alpha') + C(\alpha''^2 - \alpha'^2) + D(\alpha''^3 - \alpha'^3) + \ldots \\
\beta''' - \beta'' &= B(\alpha''' - \alpha'') + C(\alpha'''^2 - \alpha''^2) + D(\alpha'''^3 - \alpha''^3) + \ldots
\end{aligned}$$

Ces restes étant respectivement divisibles par $\alpha' - \alpha$, $\alpha'' - \alpha'$, $\alpha''' - \alpha''$, on obtiendra pour quotiens,

$$(Q)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} &= B + C(\alpha' + \alpha) + D(\alpha'^2 + \alpha'\alpha + \alpha^2) + \ldots \\
\frac{\beta'' - \beta'}{\alpha'' - \alpha'} &= B + C(\alpha'' + \alpha') + D(\alpha''^2 + \alpha''\alpha' + \alpha'^2) + \ldots \\
\frac{\beta''' - \beta''}{\alpha''' - \alpha''} &= B + C(\alpha''' + \alpha'') + D(\alpha'''^2 + \alpha'''\alpha'' + \alpha''^2) + \ldots
\end{aligned}\right.$$

Les valeurs des fractions qui composent les premiers membres de ces équations sont connues; ainsi, faisons pour abréger,

$$\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = \gamma, \quad \frac{\beta'' - \beta'}{\alpha'' - \alpha'} = \gamma', \quad \frac{\beta''' - \beta''}{\alpha''' - \alpha''} = \gamma'' \ldots$$

On trouvera de cette manière

$$(Q') \quad \frac{\gamma' - \gamma}{\alpha'' - \alpha} = C + D\,(\alpha'' + \alpha' + \alpha) \ldots$$

$$\frac{\gamma'' - \gamma'}{\alpha''' - \alpha'} = C + D\,(\alpha''' + \alpha'' + \alpha') \ldots$$

Soient de même, pour abréger,

$$\frac{\gamma' - \gamma}{\alpha'' - \alpha} = \delta, \quad \frac{\gamma'' - \gamma'}{\alpha''' - \alpha'} = \delta' \ldots,$$

on trouvera

$$\frac{\delta' - \delta}{\alpha''' - \alpha} = D \ldots \text{ et ainsi de suite.}$$

On voit par là que les valeurs des coefficiens A, B, C, D... s'obtiennent à partir des dernières. Pour donner un exemple de cette détermination, supposons que l'équation précédente soit terminée à $\frac{\gamma' - \gamma}{\alpha'' - \alpha} = C$, ou, ce qui est de même, que l'on n'ait que trois points donnés M, M', M'', auquel cas l'équation proposée sera

$$y = A + Bx + Cx^2;$$

et les quotiens (Q), (Q') se réduiront à

$$\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = B + C\,(\alpha' + \alpha) = \gamma, \qquad (1)$$

$$\frac{\beta'' - \beta'}{\alpha'' - \alpha'} = B + C\,(\alpha'' + \alpha') = \gamma',$$

$$\frac{\gamma' - \gamma}{\alpha'' - \alpha} = C = \delta.$$

Substituant la valeur de C dans l'équation (1), on aura

$$B = \gamma - \delta\alpha' - \delta\alpha.$$

Substituant de même les valeurs de C et de B dans l'équation

$$\beta = A + B\alpha + C\alpha^2,$$

on aura, après avoir réduit,

$$A = \beta - \gamma\alpha + \delta\alpha\alpha';$$

en mettant ces valeurs de A, B, C dans l'équation proposée, il viendra,

$$y = \beta + \gamma(x - \alpha) + \delta(x - \alpha)(x - \alpha').$$

Le même artifice de calcul, employé dans la détermination d'un plus grand nombre de coefficiens, conduirait à cette formule plus étendue, et dont la loi est facile à saisir,

$$y = \beta + \gamma(x - \alpha) + \delta(x - \alpha)(x - \alpha') + \iota(x - \alpha)(x - \alpha')(x - \alpha'')\ldots$$

Lagrange, qui rapporte cette solution d'après Newton (*Cahiers de l'Ecole Normale*), observe que l'on peut parvenir à un plus grand degré de simplicité par la considération suivante :

« Puisque, continue cet illustre géomètre, y doit devenir β, β', β''.... lorsque x devient α, α', α''... il est » aisé de voir que l'expression de y sera de cette forme,

$$y = A'\beta + B'\beta' + C'\beta'' + \ldots.$$

» où les quantités A', B', C'.... doivent être exprimées » en x, de manière qu'en faisant $x = \alpha$, on ait $A' = 1$, » $B' = 0$, $C' = 0$.... que de même en faisant $x = \alpha'$, on » ait $A' = 0$, $B' = 1$, $C' = 0$... qu'en faisant $x = \alpha''$, on » ait pareillement $A' = 0$, $B' = 0$, $C' = 1$... ainsi de suite; » d'où il est facile de conclure que les valeurs de A', B', C'..., » doivent avoir la forme

$$A' = \frac{(x - \alpha')(x - \alpha'')(x - \alpha''')}{(\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'')(\alpha - \alpha''')}\ldots.$$

$$B' = \frac{(x - \alpha)(x - \alpha'')(x - \alpha''')}{(\alpha' - \alpha)(\alpha' - \alpha'')(\alpha' - \alpha''')}\ldots.$$

$$C' = \frac{(x - \alpha)(x - \alpha')(x - \alpha''')}{(\alpha'' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')(\alpha'' - \alpha''')}\ldots.$$

» en prenant autant de facteurs dans les numérateurs et » dans les dénominateurs, qu'il y aura de points donnés » de la courbe moins un. »

» Cette dernière expression de y, quoique sous une forme » différente de la première, revient cependant au même, » comme on peut s'en assurer par le calcul, en dévelop- » pant les valeurs γ, δ, ε. ... et ordonnant les termes » suivant les quantités β, β', β''.... mais elle est préfé- » rable par la simplicité de l'analyse sur laquelle elle est » fondée, et par sa forme même qui est beaucoup plus com- » mode pour le calcul. Il suit de là que l'on pourra con- » struire géométriquement tant de termes intermédiaires » que l'on voudra d'une série quelconque composée de plu- » sieurs termes : ce qui est fort utile pour remplir les la- » cunes qui pourraient se trouver dans des suites d'obser- » vations ou d'expériences, ou dans des tables calculées par » des formules ou des constructions données, » et c'est en quoi consiste la *méthode d'interpolation*.

La valeur générale de y trouvée ci-dessus, en premier lieu, se met sous une autre forme qu'il est utile de connaître, lorsque les valeurs α, α', α''... sont équidifférentes : c'est ce que nous allons faire voir en peu de mots.

Supposons $\alpha' - \alpha = h$, on aura d'abord, en vertu de l'hypothèse présente,

$$\alpha' = \alpha + h, \quad \alpha'' = \alpha + 2h, \quad \alpha'' = \alpha + 3h, \text{ etc.};$$

et faisons de plus $x = \alpha + h'$, on aura ensuite

$$x - \alpha = h', \quad x - \alpha' = h' - h, \quad x - \alpha'' = h' - 2h, \text{ etc.}$$

Maintenant, si pour abréger, l'on pose

$$\beta' - \beta = \Delta\beta, \quad \beta'' - \beta' = \Delta\beta', \quad \beta''' - \beta'' = \Delta\beta'', \text{ etc.}$$

Il en résultera, d'après ce qui précède,

$$\frac{\Delta\beta}{h} = \gamma, \quad \frac{\Delta\beta'}{h} = \gamma', \quad \frac{\Delta\beta''}{h} = \gamma'' \ldots$$

Enfin, si l'on désigne par la caractéristique Δ les différences premières des ordonnées, par Δ^2 les différences secondes ou les différences des différences premières de ces mêmes lignes, par Δ^3 les différences troisièmes ou les différences des différences secondes et ainsi de suite, on trouvera, avec un peu d'attention,

$$\gamma = \frac{\Delta\beta}{h}, \quad \delta = \frac{\Delta^2\beta}{1.2h^2}, \quad \iota = \frac{\Delta^3\beta}{1.2.3\,h^3}, \text{ etc.}$$

et par suite

$$y = \beta + \frac{h'}{h}\Delta\beta + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2\beta + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3\beta + \ldots$$

Telle est la formule d'interpolation la plus usitée dans les calculs géodésiques et astronomiques ; elle résulte d'une théorie très importante exposée dans l'Appendice au *Traité élémentaire de Calcul différentiel et intégral* de M. Lacroix ; mais l'on y parvient si directement par la méthode analytique précédente, que nous avons jugé convenable de la rapporter ici, à cause de son utilité.

TROISIÈME SECTION.

GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS.

CHAPITRE PREMIER.

De la Polyédrométrie.

110. Lorsque les Géomètres se furent occupés de la recherche des propriétés des figures planes rectilignes, ils ne tardèrent pas à découvrir plusieurs théorèmes remarquables sur les polyèdres; néanmoins, cette partie de la géométrie des solides, dans laquelle on considère les diverses relations qui existent entre les angles dièdres et leurs faces, est encore trop peu avancée pour former une doctrine complète. Je ne m'attacherai donc, comme dans le 1er chapitre de la deuxième section, qu'à faire connaître quelques-uns des théorèmes élégans que l'on doit à MM. Lhuilier et Carnot. Quant aux propositions que l'on a coutume de considérer dans les élémens, et qui se rapportent à la Polyédrométrie, on en trouvera l'analyse détaillée dans la *Géométrie* de M. Legendre.

LEMME.

Si l'on projette une surface plane sur un autre plan, par des perpendiculaires à celui-ci, la projection de cette surface sera égale à son aire multipliée par le cosinus de l'angle des deux plans.

Ainsi, soient a l'aire projetée, b sa projection orthogonale, et θ l'angle des deux plans; on aura

$$b = a \cos \theta, \quad \text{ou} \quad b = a \cos (a, b),$$

en désignant l'angle dièdre θ par (a, b).

Je ne donnerai point la démonstration de ce lemme, parce qu'elle se trouve dans les ouvrages élémentaires auxquels celui-ci se rattache; mais je tirerai pour conséquence de cette proposition le théorème suivant :

THÉORÈME.

111. *L'aire de l'une des faces d'un polyèdre quelconque est égale à la somme des aires de toutes les autres faces multipliées par le cosinus de l'angle qu'elles forment avec le plan de projection.*

Soient $a, b, c, d \ldots\ldots$ les aires des faces d'un polyèdre ; on aura, en vertu du lemme précédent, et en prenant successivement chacune de ces faces pour plan de projection,

$$\left.\begin{array}{l} a = b \cos (a, b) + c \cos (a, c) + d \cos (a, d) \ldots\ldots \\ b = a \cos (b, a) + c \cos (b, c) + d \cos (b, d) \ldots\ldots \\ c = a \cos (c, a) + b \cos (c, b) + d \cos (c, d) \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (A)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les angles (a, b), $(a, c) \ldots\ldots$ désignent les angles dièdres intérieurs du polyèdre.

THÉORÈME.

112. *Si l'on nomme* base *d'un polyèdre une quelconque de ses faces, le produit d'une face par le sinus de son inclinaison sur la base, est égal à la somme des produits de chacune des autres faces par le sinus de son inclinaison sur la base, et par le cosinus de l'angle formé par les communes sections du plan de la base avec la première face et avec celle des faces restantes qui est prise comme facteur.*

Multipliant successivement les deux membres de la

première des équations (A) du n° précédent par les coefficiens de a dans les suivantes, et ajoutant les produits aux membres correspondans de ces dernières, on trouvera pour résultats indépendans de la face a,

$$b \sin^2 (a, b) = c\,[\cos (b, c) + \cos (a, b) \cos (a, c)] + d\,[\cos (b, d) + \cos (a, b) \cos (a, d)],$$

. . . . . .

$$c \sin^2 (a, c) = b\,[\cos (b, c) + \cos (a, b) \cos (a, c)] + d\,[\cos (c, d) + \cos (a, c) \cos (a, d)],$$

. . . . . .

et ainsi de suite.

Maintenant, si l'on désigne par $\beta\alpha\gamma$ l'angle formé par les deux communes sections du plan de la base a avec chacune des faces b, c; et qu'on adopte une dénomination pareille relativement aux autres faces, on aura, à cause de $\cos(b,c) + \cos(a, b) \cos (a,c) = \sin(a,b) \sin (a,c) \cos (\beta\alpha\gamma)$, (*Trigonom.* de M. Legendre, art. 81), les équations suivantes :

$$b \sin (a,b) = c \sin (a,c) \cos (\beta\alpha\gamma) + d \sin (a,d) \cos (\beta\alpha\delta) + \text{etc.}$$
$$c \sin (a,c) = b \sin (a,b) \cos (\beta\alpha\gamma) + d \sin (a,d) \cos (\gamma\alpha\delta) + \text{etc.}$$

. . . . . .

ce qu'il fallait prouver.

THÉORÈME.

113. *Dans tout polyèdre le carré de la moitié de sa surface est égal à la somme des produits de toutes les faces multipliées deux à deux, et par le carré du cosinus de leur demi-inclinaison.*

Cette propriété se reconnaît d'abord ; car si, après avoir multiplié chacune des équations du n° 111 par son premier membre, on ajoute ensemble toutes ces équations, et qu'aux deux membres de l'équation résultante on ajoute encore le double produit de toutes les faces prises deux à deux, on

aura, à cause de $\frac{1+\cos(a,b)}{2} = \cos^2 \frac{1}{2}(a,b)$, etc....., l'équation suivante,

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots\ldots}{2}\right)^2 = ab\cos^2\tfrac{1}{2}(a,b) + ac\cos^2\tfrac{1}{2}(a,c) + ad\cos^2\tfrac{1}{2}(a,d) + \text{etc.}\ldots,$$

qui est précisément la traduction analytique de l'énoncé du théorème.

THÉORÈME.

114. *La somme des carrés de toutes les faces d'un polyèdre, est égale au double de la somme des produits de toutes ces faces multipliées deux à deux, et par le cosinus de l'angle dièdre qu'elles comprennent.*

En effet, si l'on multiplie les deux membres des équations (A) du n° 111, respectivement par a, b, c, d...., et qu'on ajoute tous ces produits, on aura, comme le porte l'énoncé du théorème,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots = 2ab\cos(a,b) + 2ac\cos(a,c) + 2ad\cos(a,d) + 2bc\cos(b,c) + \text{etc.}\ldots$$

Ainsi, les polyèdres jouissent, par rapport à leurs faces et aux angles qu'elles forment, de la même propriété que les polygones à l'égard de leurs côtés et des angles qu'ils comprennent (n° 34). Cette remarque s'étend au théorème suivant.

THÉORÈME.

115. *Dans tout polyèdre le carré d'une face est égal à la somme des carrés des autres faces, moins deux fois la somme des produits de toutes ces autres faces multipliées deux à deux, et par le cosinus de l'angle dièdre qu'elles comprennent.*

Opérant comme dans le n° 34, on a sur-le-champ

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 \ldots - 2[bc\cos(b,c) + bd\cos(b,d) + \ldots].$$

Ainsi, pour la pyramide triangulaire qui est, parmi les polyèdres, le corps le plus simple, on a

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2[bc\cos(b,c) + bd\cos(b,d) + cd\cos(c,d)].$$

Mais lorsqu'un des angles trièdres est formé de trois angles droits; par exemple, lorsque les faces b, c, d sont des triangles rectangles, les angles dièdres (b, c), (b, d), (c, d) sont droits, et pour lors l'expression précédente se réduit à

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2;$$

c'est-à-dire, que *dans un tétraèdre rectangle le carré de la face opposée à l'angle trirectangle est égal à la somme des carrés des trois autres faces;* propriété analogue à celle du triangle rectangle.

De Gua, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1783, avait déjà démontré ce cas particulier; mais MM. Lhuilier et Carnot sont les premiers qui l'aient généralisé, l'un dans sa *Polyédrométrie* (*Mémoires présentés à l'Institut* par les savans étrangers, tom. I), l'autre dans sa *Géométrie de position*. On trouvera, dans le premier ouvrage, le développement du procédé à suivre pour *déterminer la somme des produits d'un nombre quelconque de masses par les carrés de leurs distances à un point quelconque.* C'est encore M. Lhuilier qui a démontré (*Mémoires de Berlin*, année 1786) ce théorème, savoir : *si d'un point pris dans l'intérieur d'un polyèdre on abaisse des perpendiculaires sur ses faces, et que sur ces perpendiculaires on prenne, depuis ce point, des droites qui soient entre elles comme ces faces, ce point sera le centre commun de gravité de poids égaux placés aux extrémités de ces perpendiculaires.*

Ces propositions peuvent être traitées avec assez de simplicité en faisant usage des principes de la Polyédrométrie.

CHAPITRE II.

Des équations du point, de la ligne droite et du plan, considérés dans l'espace; et de quelques propriétés des projections.

---

116. Je n'énoncerai ici, comme dans le chapitre 2 de la IIe section, que la plupart des propositions préliminaires relatives à la ligne droite et au plan, parce qu'elles se trouvent résolues dans l'*Appendice à l'application de l'Algèbre à la Géométrie* de M. Lacroix. A défaut de cet ouvrage, on peut voir aussi sur cette matière la 1re partie de la *Géométrie analytique*, par MM. Monge et Hachette, ou le *Traité analytique des courbes et des surfaces du premier et du second degré*, par M. Biot, etc.

Un point est donné dans l'espace par ses distances à trois plans coordonnés, et

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma$$

sont les équations de ce point. Deux d'entre elles appartiennent à sa projection sur un des plans coordonnés; les deux premières, par exemple, déterminent la projection du point sur le plan des xy.

Il est évident que les équations précédentes sont aussi celles de trois plans respectivement parallèles aux plans des yz, xz, xy. Le point proposé est donc le sommet de l'angle trièdre que les trois premiers plans font entre eux :

cette conséquence est encore vraie par rapport à des plans coordonnés obliques.

En général, les points de l'espace seront rapportés à des coordonnées positives, à moins que quelque circonstance particulière n'exige le contraire.

117. Si deux points ont respectivement pour coordonnées rectangulaires xyz, $x'y'z'$, leur distance sera exprimée par

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2};$$

ainsi l'équation de la surface de la sphère, rapportée de même à des coordonnées rectangulaires, est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2;$$

R dénotant le rayon, et α, β, γ étant les coordonnées du centre. Il est évident que lorsque l'origine des axes est à ce point, on a seulement

$$x^2+y^2+z^2=R^2;$$

telle est l'équation la plus simple de la sphère.

118. Une droite est déterminée par les équations de deux plans projetans qui la contiennent; ainsi

$$x=az+\alpha,\quad y=bz+\beta$$

fixent cette droite dans l'espace.

De ces deux équations, il résulte une troisième que l'on obtient en éliminant z, et qui appartient à la troisième projection de la droite sur le plan des xy.

119. Une droite qui passe par un point donné $x'y'z'$, a pour équations

$$x-x'=a(z-z'),\quad y-y'=b(z-z').$$

En l'assujettissant à passer par un autre point $x''y''z''$, ces équations deviennent

$$x''-x'=a(z''-z'),\quad y''-y'=b(z''-z'),$$

et déterminent conséquemment les constantes a, b; alors on a

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z'), \quad y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z').$$

Deux droites sont parallèles dans l'espace lorsque les intersections de leurs plans projetans avec les plans coordonnés sont elles-mêmes parallèles; d'où il suit que si

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

sont les équations de la première droite,

$$x = az + \alpha', \quad y = bz + \beta'$$

seront celles de la seconde.

120. Deux droites, qui ont pour équations aux coordonnées rectangles

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha, \\ y = bz + \beta, \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x = a'z + \alpha', \\ y = b'z + \beta', \end{array}\right.$$

et qui se coupent dans l'espace, forment un angle V, dont le sinus, le cosinus et la tangente sont respectivement

$$\sin V = \frac{\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - a'b)^2}}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2 + b'^2)}},$$

$$\cos V = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2 + b'^2)}},$$

$$\operatorname{tang} V = \frac{\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - a'b)^2}}{1 + aa' + bb'}.$$

Lorsque cet angle V est droit, on a $\cos V = 0$, et par conséquent

$$1 + aa' + bb' = 0.$$

Si l'une de ces droites, la seconde, par exemple, coïncide avec l'axe des z, dont les équations sont $x = 0$, $y = 0$, on aura $a' = 0$, $b' = 0$; et en désignant par Z l'angle que la première droite fait avec cet axe, on obtiendra

$$\cos Z = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

De même, si Y et X sont les angles que cette droite fait avec les axes des y et des x, on aura

$$\cos Y = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \quad \cos X = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Il suit de là qu'en ajoutant les carrés de ces trois dernières équations, l'on parviendra à cette relation remarquable,

$$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1,$$

laquelle consiste en ce que *la somme des carrés des cosinus des angles qu'une droite fait avec les trois axes rectangles, est égale au carré du rayon.*

Si par l'origine des coordonnées, considérée comme le centre d'une sphère, on menait deux autres droites respectivement parallèles à celles dont il vient d'être question, les équations de ces droites seraient

$$x = az, \qquad x = a'z,$$
$$y = bz, \qquad y = b'z;$$

et si l'on désignait par xyz, $x'y'z'$, les coordonnées des points où ces mêmes droites percent la surface de la sphère, dont nous supposerons le rayon $= 1$, on aurait nécessairement

$$a = \frac{x}{z}, \qquad a' = \frac{x'}{z'},$$

$$b = \frac{y}{z}, \qquad b' = \frac{y'}{z'};$$

par suite, enfin,

$$\cos V = xx' + yy' + zz',$$

à cause de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et de $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$.

121. Lorsque deux droites sont dans un même plan, on

a nécessairement entre les constantes qui entrent dans leurs équations (n° 120), la relation

$$(\alpha'-\alpha)(b'-b)-(\beta'-\beta)(a'-\alpha)=0.$$

122. L'équation générale du plan est

$$Ax+By+Cz+D=0;$$

et comme on peut lui donner la forme suivante :

$$z=ax+by+c,$$

sans lui rien ôter de sa généralité, il s'ensuit que des quatre constantes A, B, C, D, trois seulement sont nécessaires pour particulariser ce plan. On pourra donc, dans les applications, égaler à l'unité un de ces coefficiens, ou bien le déterminer par des conditions particulières; le plus souvent on les conserve tous quatre, afin de rendre les calculs plus symétriques.

On obtient les équations des lignes suivant lesquelles un plan rencontre les plans coordonnés, en faisant successivement $z=0$, $y=0$, $x=0$, dans l'équation de ce plan. Ces lignes d'intersection se nomment aussi les *traces* du plan proposé sur ceux des xy, xz, yz.

Si un plan est assujetti à passer par trois points $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$, son équation générale fournira les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Ax'+By'+Cz'+D&=0,\\ Ax''+By''+Cz''+D&=0,\\ Ax'''+By'''+Cz'''+D&=0; \end{aligned}$$

et de là on tire aisément

$$\begin{aligned} A&=z'(y''-y''')+z''(y'''-y')+z'''(y'-y''),\\ B&=x'(z''-z''')+x''(z'''-z')+x'''(z'-z''),\\ C&=y'(x''-x''')+y''(x'''-x')+y'''(x'-x''),\\ D&=x'(y''z'''-y'''z'')+x''(y'''z'-y'z''')+x'''(y'z''-y''z'). \end{aligned}$$

En soustrayant la première des équations précédentes de

l'équation générale $Ax + By + Cz + D = 0$, on a

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0.$$

C'est celle d'un plan passant par un point donné $x'y'z'$.

Il est remarquable que si t, t', t'' sont, sur les plans des xy, xz, yz, les aires des projections du triangle formé par les droites qui joignent deux à deux les points donnés, on aura

$$t = \tfrac{1}{2}C, \quad t' = \tfrac{1}{2}B, \quad t'' = \tfrac{1}{2}A;$$

et que si V désigne le volume du tétraèdre qui a pour base ce triangle, et dont le sommet est à l'origine des coordonnées, on aura en outre,

$$V = \tfrac{1}{6}D;$$

c'est ce qui sera démontré au n° 173, en analysant les propriétés de la pyramide triangulaire.

123. Deux plans ou deux surfaces quelconques qui se coupent, ont, à leurs points d'intersection, les mêmes coordonnées; d'où il suit que si, de leurs équations qui ont lieu en même temps, on élimine une des variables, le résultat sera l'équation de la projection de la ligne d'intersection des deux surfaces sur le plan désigné par les deux autres variables.

Deux plans qui sont parallèles ont, sur les plans coordonnés, leurs traces respectivement parallèles: ainsi, lorsque les équations de ces plans sont

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

on a, pour les conditions du parallélisme,

$$\frac{A}{C} = \frac{A'}{C'}, \quad \frac{B}{C} = \frac{B'}{C'}, \quad \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'},$$

dont une d'elles est nécessairement comportée par les deux autres.

124. Une droite est perpendiculaire à un plan lorsque les projections de cette droite sont perpendiculaires aux

traces de ce plan; d'où il suit que si, en supposant les plans coordonnés rectangulaires,

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

sont les équations de la droite, et

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

l'équation du plan, on aura, pour les conditions de la perpendicularité,

$$a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C};$$

par conséquent l'équation du plan deviendra

$$ax + by + z + \frac{D}{C} = 0.$$

Pour trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point donné sur un plan connu, soient $x'\,y'\,z'$ les coordonnées de ce point: les équations de la perpendiculaire seront

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z'), \quad y - y' = \frac{B}{C}(z - z');$$

d'un autre côté, la longueur P de cette perpendiculaire aura pour expression

$$P = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

xyz étant considérées comme les coordonnées rectangles de son pied. Mais en substituant pour $x - x'$ et $y - y'$ leurs valeurs ci-dessus, il viendra

$$P = \frac{z - z'}{C}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}:$$

et comme à l'équation du plan on peut donner la forme

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') + Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

on obtiendra, en éliminant $x - x'$ et $y - y'$,

$$\frac{z - z'}{C} = -\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

De là il est aisé de conclure que

$$P = \pm \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

le signe supérieur ayant lieu, si l'on veut, pour le cas où la perpendiculaire est au-dessus du plan, et le signe inférieur pour le cas où elle est au-dessous.

125. Si les équations de deux plans sont

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

et que V désigne l'angle qu'ils forment, on aura, en supposant toujours les plans coordonnés rectangulaires,

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}. \quad (m)$$

Dans le cas où ces deux plans sont perpendiculaires entre eux, on a $\cos V = 0$, et pour lors

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Lorsque l'un de ces plans est le plan même des xy, dont l'équation est $z = 0$, on a $A' = 0$, $B' = 0$, $C' = 1$ et $D' = 0$, et partant, pour le cosinus de l'angle p que l'autre plan fait avec celui-ci,

$$\cos p = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (1)$$

On aura de même pour le cosinus de l'angle p' qu'il fait avec le plan xz,

$$\cos p' = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (2)$$

et pour le cosinus de l'angle p'' qu'il fait avec le plan yz,

$$\cos p'' = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3)$$

Ces trois dernières équations conduisent à cette relation

$$\cos^2 p + \cos^2 p' + \cos^2 p'' = 1, \qquad (n)$$

qui est analogue à celle du n° 120.

Si l'on désigne par q, q', q'' les inclinaisons du second plan $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ sur chacun des plans coordonnés xy, xz, yz, il est évident qu'à cause des équations (1) (2) (3), celle (m) deviendra

$$\cos V = \cos p \cos q + \cos p' \cos q' + \cos p'' \cos q''. \qquad (m')$$

Enfin, si r, r', r'' sont les inclinaisons d'un troisième plan $A''x + B''y + C''z + D'' = 0$ sur les mêmes plans coordonnés, il est incontestable que lorsque ces trois nouveaux plans seront perpendiculaires entre eux, on aura les six relations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2 p + \cos^2 p' + \cos^2 p'' = 1, \\ \cos^2 q + \cos^2 q' + \cos^2 q'' = 1, \\ \cos^2 r + \cos^2 r' + \cos^2 r'' = 1, \\ \cos p \cos q + \cos p' \cos q' + \cos p'' \cos q'' = 0, \\ \cos p \cos r + \cos p' \cos r' + \cos p'' \cos r'' = 0, \\ \cos q \cos r + \cos q' \cos r' + \cos q'' \cos r'' = 0. \end{array}\right\} (T)$$

La formule (1) conduit naturellement à celle-ci:

$$\text{tang } p = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C},$$

puisque $\text{tang } p = \dfrac{\sin p}{\cos p} = \dfrac{\sqrt{1 - \cos^2 p}}{\cos p}$. Or, si le plan que l'on considère passait par trois points donnés, sa position serait nécessairement déterminée, et l'on aurait, n° 122,

$$A = z'(y'' - y''') + z''(y''' - y') + z'''(y' - y''),$$
$$B = z'(x''' - x'') + z''(x' - x''') + z'''(x'' - x');$$

et si l'on représentait par K, K', K'' les côtés du triangle que forment les lignes qui joignent deux à deux les points donnés, et par k, k', k'' leurs projections horizontales, on

aurait

$$k^2 = (x'' - x''')^2 + (y'' - y''')^2,$$
$$k'^2 = (x' - x''')^2 + (y' - y''')^2,$$
$$k''^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2;$$

par suite

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 = {} & z'^2 k^2 + z''^2 k'^2 + z'''^2 k''^2 \\ & + z' z'' [k''^2 - k'^2 - k^2] + z' z''' [k'^2 - k''^2 - k^2] \\ & + z'' z''' [k^2 - k'^2 - k''^2]; \end{aligned}$$

ou bien,

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 = {} & k^2 (z' - z'')(z' - z''') + k'^2 (z'' - z')(z'' - z''') \\ & + k''^2 (z''' - z')(z''' - z''). \end{aligned}$$

D'un autre côté, la projection horizontale du triangle KK'K'', étant désignée par t, l'on a (n° 122), $2t = C$; partant,

$$\text{tang } p = \frac{\sqrt{k^2(z'-z'')(z'-z''')+k'^2(z''-z')(z''-z''')+k''^2(z'''-z')(z'''-z'')}}{2t}.$$

Telle est la tangente tabulaire de l'angle qu'un plan assujetti à passer par trois points donnés fait avec l'horizon.

126. On peut trouver aisément, d'après ce qui précède, l'angle qu'une droite fait avec un plan. En effet, soient

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta$$

les équations de la droite, et

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

celle du plan; si par l'origine on conçoit un plan perpendiculaire à la droite, son équation, qui est de la forme $A'x + B'y + C'z = 0$, deviendra, à cause de $a = \frac{A'}{C'}$, $b = \frac{B'}{C'}$,

$$ax + by + z = 0;$$

et l'angle qu'il formera avec le plan donné sera nécessai-

rement le complément de l'angle cherché V; on aura donc (n° 125)

$$\sin V = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Il suit de là que l'équation

$$aA + bB + C = 0$$

exprimera que la droite et le plan sont parallèles.

Si ce plan passait par la droite, leurs équations auraient nécessairement lieu en même temps, et l'on aurait

$$D = -(Aa + Bb + C)z - A\alpha - B\beta;$$

ainsi l'équation du plan serait

$$Ax + By + Cz = A\alpha + B\beta,$$

en vertu de la relation précédente.

127. La relation (n) trouvée dans le n° 125 donne le moyen de démontrer ce théorème, savoir : *Si une figure plane quelconque est projetée sur trois plans rectangulaires, le carré de l'aire de cette figure sera égal à la somme des carrés des aires de ses trois projections ;* car soient S une surface plane, et A, A', A'', ses trois projections respectives sur les plans xy, xz, yz, on aura

$$A^2 = S^2 \cos^2 p, \quad A'^2 = S^2 \cos^2 p', \quad A''^2 = S^2 \cos^2 p'',$$

p, p', p'' ayant les mêmes significations que ci-dessus; donc en vertu de la relation citée,

$$S^2 = A^2 + A'^2 + A''^2. \qquad (1)$$

Désignons maintenant par V l'angle que S forme avec sa projection B, on aura $B = S \cos V$;
et à cause de

$$A = S \cos p, \quad A' = S \cos p', \quad A'' = S \cos p'',$$

il est clair que si α, β, γ sont les inclinaisons de B sur ces mêmes plans rectangulaires A, A', A'', l'équation (m') qui

donne la valeur de cos V, se changera en celle-ci :

$$\cos V = \cos \alpha \cos p + \cos \beta \cos p' + \cos \gamma \cos p'',$$

et qu'en multipliant chaque membre par S, on obtiendra

$$B = A \cos \alpha + A' \cos \beta + A'' \cos \gamma.$$

Si donc S, S', S''... représentent un nombre quelconque d'aires situées dans des plans différens; que M, M', M'' soient respectivement les sommes des projections de ces aires sur les trois plans coordonnés A, A', A''; que de plus N soit la somme des projections de ces mêmes aires sur un quatrième plan faisant les angles α, β, γ avec les trois plans primitifs, on aura autant d'équations semblables à la précédente que d'aires projetées, et la somme de ces équations sera

$$N = M \cos \alpha + M' \cos \beta + M'' \cos \gamma.$$

De même, si N' est la somme des projections de S, S', S''... sur un plan qui fait les angles α', β', γ' avec les plans primitifs, et que N'' soit la somme des projections des aires dont il s'agit, relatives à un plan dont les inclinaisons sur les plans primitifs sont α'', β'', γ'', on aura

$$N' = M \cos \alpha' + M' \cos \beta' + M'' \cos \gamma',$$
$$N'' = M \cos \alpha'' + M' \cos \beta'' + M'' \cos \gamma''.$$

Donc *la projection orthogonale d'une suite d'aires quelconque sur un plan est égale à la somme des projections formées, en projetant d'abord toutes ces aires sur trois plans rectangulaires, ensuite en projetant ces projections sur le plan proposé.*

Lorsque les trois nouveaux plans de projection N, N', N'' sont perpendiculaires entre eux, on a entre cos α, cos β, cos γ... les relations (T) du n° 125, et par suite celles (10) et (11) du n° 132. Ainsi, élevant au carré les trois dernières équations ci-dessus, et réduisant leur somme à l'aide des dernières relations citées, on obtient

$$N^2 + N'^2 + N''^2 = M^2 + M'^2 + M''^2. \quad (2)$$

Du principe général que l'on vient de démontrer il résulte réciproquement que

$$\left.\begin{aligned} M &= N\cos\alpha + N'\cos\alpha' + N''\cos\alpha'', \\ M' &= N\cos\beta + N'\cos\beta' + N''\cos\beta'', \\ M'' &= N\cos\gamma + N'\cos\gamma' + N''\cos\gamma'', \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

puisque les plans N, N′, N″ sont rectangulaires.

La relation (2) nous apprend que quelle que soit la direction des trois plans rectangulaires de projection qui forment le second système, la somme $N^2 + N'^2 + N''^2$ est toujours constante. Il est en outre aisé de déduire des équations (1) et (2) cette nouvelle propriété : *Si l'on projette une suite d'aires quelconque* S, S′, S″.... *sur deux systèmes de plans coordonnés rectangulaires, liés entre eux comme on voudra, la somme des produits deux à deux des projections prises sur chacun des plans d'un système, est égale à la somme des produits deux à deux des projections prises sur chacun des plans de l'autre système.*

Si toutes les aires S, S′, S″.... étaient dans un même plan, et que l'on prît l'un des plans primitifs pour représenter celui-ci, ce qui est permis, l'une des trois quantités M, M′, M″ serait égale à S + S′ + S″...., et les deux autres seraient nulles; d'où il suit que l'équation (2) exprimerait la même propriété que celle (1).

Puisque dans le cas général où les aires S, S′, S″.... sont dans des plans différens, la relation (2) a toujours lieu, il est clair qu'alors

$$N = \sqrt{M^2 + M'^2 + M''^2 - N'^2 - N''^2}\,;$$

ainsi, la plus grande valeur que puisse acquérir la projection N, c'est lorsque $N' = 0$, $N'' = 0$. La quantité constante $\sqrt{M^2 + M'^2 + M''^2}$ exprime donc la plus grande somme des projections, sur un même plan, des aires que l'on considère dans l'espace.

Le plan qui répond à cette plus grande projection joue

un rôle important en Mécanique : voici comment on en détermine la direction.

Les équations $N' = 0$, $N'' = 0$, qui caractérisent ce plan, réduisent celles désignées par (3), à

$$M = N \cos \alpha, \quad M' = N \cos \beta, \quad M'' = N \cos \gamma,$$

d'où l'on tire sur-le-champ

$$\cos \alpha = \frac{M}{N} = \frac{M}{\sqrt{M^2 + M'^2 + M''^2}}; \cos \beta = \frac{M'}{N}; \cos \gamma = \frac{M''}{N}.$$

Ainsi, toutes les fois que l'on connaîtra les sommes des projections M, M', M'', sur trois plans rectangulaires choisis arbitrairement, la direction du plan de la plus grande projection se déterminera au moyen des trois angles α, β, γ; mais la position absolue de ce plan restera indéterminée, car les projections de chacune des aires $S, S', S'' \ldots$, et par conséquent la somme de ces projections sont les mêmes sur tous les plans parallèles entre eux.

Si l'on représente par θ l'inclinaison d'un autre plan T sur celui de la plus grande projection, la somme T des projections sur ce nouveau plan sera donnée par l'équation

$$T = \sqrt{M^2 + M'^2 + M''^2} \times \cos \theta.$$

En effet, soient $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$, les inclinaisons du plan T sur les trois plans primitifs; on aura, par ce qui précède,

$$T = M \cos \varepsilon + M' \cos \varepsilon' + M'' \cos \varepsilon'';$$

et comme la direction de ces plans primitifs est arbitraire, on peut supposer que l'un d'eux, par exemple celui qui répond à M, coïncide avec le plan de la plus grande projection; alors $\varepsilon = \theta$, $M = N$, $M' = 0$, $M'' = 0$, et par conséquent

$$T = N \cos \theta.$$

Donc la valeur de T est la même pour tous les plans qui font le même angle avec celui de la plus grande projection.

Il n'est pas de notre sujet d'appliquer à la Mécanique les propriétés géométriques que nous venons de démontrer d'après M. Poisson; nous observerons seulement que dans un système de corps en mouvement dans l'espace, et soumis à leurs actions réciproques, il existe un plan dont on peut déterminer la position à chaque instant, et qui, ainsi que l'illustre auteur de la *Mécanique céleste* l'a reconnu et démontré le premier, jouit de la propriété remarquable d'être toujours parallèle à lui-même; mais M. Poisson a eu l'heureuse idée de déduire ce beau théorème sur le *plan invariable* des considérations géométriques précédentes. (*Voy.* le n° 10 de la *Correspondance sur l'Ecole Polythecnique*.)

128. Il est aisé de se convaincre que les équations de la ligne droite et du plan ont toujours les mêmes formes, soit qu'elles se rapportent à des coordonnées rectangulaires, soit qu'elles se rapportent à des coordonnées obliques; mais les coefficiens des variables ont, par rapport au second système, une signification toute différente de celle relative aux coordonnées rectangulaires; c'est ce que nous avons déjà fait observer au n° 41. Il importe donc de montrer comment on doit modifier ceux des résultats précédens qui dépendent des angles des coordonnées. Voici, à ce sujet, quelques-unes des formules publiées par M. Français. Nous laisserons cependant au lecteur le plaisir de remplir lui-même les lacunes qui se trouveront à dessein dans nos calculs. Au surplus, la marche à suivre dans cette circonstance est assez clairement indiquée par celle tracée au n° 46, pour qu'il soit inutile d'entrer dans de grands développemens.

Soient x, y, z, les coordonnées obliques d'un point M de l'espace, et A leur origine (fig. 83). Soit, en outre, $AM = \rho$, et faisons

$$x = a\rho, \quad y = b\rho, \quad z = c\rho;$$

Les équations de la droite AM seront

$$cx = az, \quad cy = bz.$$

Cela posé, si des extrémités de x et y on abaisse des perpendiculaires sur AM, on trouvera que

$$(a) \qquad \rho = x\cos(\rho, x) + y\cos(\rho, y) + z\cos(\rho, z);$$

partant,

$$(b) \qquad 1 = a\cos(\rho, x) + b\cos(\rho, y) + c\cos(\rho, z);$$

et si de l'extrémité de ρ on abaisse successivement une perpendiculaire sur chacun des axes des coordonnées, on arrivera sans peine à ces trois relations,

$$(c) \quad \begin{cases} \rho\cos(\rho, x) = x + y\cos(x, y) + z\cos(x, z), \\ \rho\cos(\rho, y) = y + z\cos(y, z) + x\cos(x, y), \\ \rho\cos(\rho, z) = z + x\cos(x, z) + y\cos(y, z); \end{cases}$$

ou bien à celles-ci :

$$(c') \quad \begin{cases} \cos(\rho, x) = a + b\cos(x, y) + c\cos(x, z), \\ \cos(\rho, y) = b + c\cos(y, z) + a\cos(x, y), \\ \cos(\rho, z) = c + a\cos(x, z) + b\cos(y, z). \end{cases}$$

Multipliant par ρ tous les termes de l'équation (a), et substituant ensuite pour $\rho\cos(\rho, x)$, $\rho\cos(\rho, y)$, $\rho\cos(\rho, z)$ leurs valeurs (c), on obtiendra

$$(e) \qquad \begin{aligned} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 &+ 2xy\cos(x, y) \\ &+ 2xz\cos(x, z) \\ &+ 2yz\cos(y, z), \end{aligned}$$

et par suite

$$(e') \qquad \begin{aligned} 1 = a^2 + b^2 + c^2 &+ 2ab\cos(x, y) \\ &+ 2ac\cos(x, z) \\ &+ 2bc\cos(y, z). \end{aligned}$$

Tel serait, en Mécanique, le carré de la résultante de trois forces données d'intensité et de direction, et appliquées au même point. On voit bien ce qu'il faudrait faire pour trouver la direction de cette résultante.

Si des équations (c) on tirait les valeurs de x, y, z, et

qu'on les substituât dans (a), on aurait pour résultat une relation très remarquable entre les six angles que forment deux à deux quatre droites dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, et passant ou non par un même point. (*Voyez* un Mémoire de Carnot sur *la relation entre cinq points dans l'espace.*)

Maintenant, si l'on représente par (ρ, xy) l'angle que la droite ρ fait avec le plan des xy, et ainsi de suite, et qu'on ait égard à ce que

$$a = \frac{\sin(\rho, yz)}{\sin(x, yz)}, \quad b = \frac{\sin(\rho, xz)}{\sin(y, xz)}, \quad c = \frac{\sin(\rho, xy)}{\sin(z, xy)},$$

les équations (b, c', e') fourniront des relations entre les différens angles du système des coordonnées et de la droite ρ.

Pour une autre droite $AM' = \rho'$, dont les équations seraient

$$\rho' = \frac{x'}{a'} = \frac{y'}{b'} = \frac{z'}{c'},$$

on aurait évidemment entre $a'b'c'$ les mêmes relations que celles que nous venons d'obtenir entre abc.

Il résulte de là, et de ce que le carré de la droite qui joint les extrémités de ρ et ρ', est

$$\begin{aligned}\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\rho, \rho') = {} & (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \\ & + 2(x - x')(y - y') \cos(x, y) + 2(x - x')(z - z') \cos(x, z) \\ & + 2(y - y')(z - z') \cos(y, z),\end{aligned}$$

il résulte, disons-nous, que

$$\begin{aligned}\cos(\rho, \rho') &= a' \cos(\rho, x) + b' \cos(\rho, y) + c' \cos(\rho, z) \\ &= a \cos(\rho', x) + b \cos(\rho', y) + c \cos(\rho', z),\end{aligned}$$

expression qui, en vertu des relations (c'), se change en celle-ci :

$$\cos(\rho, \rho') = \left\{ \begin{array}{l} aa' + (bc' + cb') \cos(x, y) \\ bb' + (ca' + ac') \cos(x, z) \\ cc' + (ab' + ba') \cos(y, z). \end{array} \right.$$

La ligne $AM = \rho$ mesurant la distance de l'origine des axes à un plan passant par le point M et perpendiculaire à cette ligne, il s'ensuit que la valeur précédente de ρ, en y faisant $\cos(\rho, x) = A$, $\cos(\rho, y) = B$, $\cos(\rho, z) = C$, représentera l'équation de ce plan, c'est-à-dire qu'on aura

$$Ax + By + Cz = \rho,$$

et pour lors l'équation (b), qui pourra être écrite ainsi,

$$Aa + Bb + Cc = 1, \qquad (d)$$

exprimera la condition à laquelle devront satisfaire les coefficiens a, b, c, A, B, C, pour que la droite soit perpendiculaire au plan; enfin, les équations (c') donneront les coefficiens de ce plan (*).

De ces dernières équations l'on tirerait, par voie d'élimination, en ayant égard à la formule fondamentale de la résolution des triangles sphériques, et désignant par $(xy, yz)\ldots$ l'angle des plans coordonnés pris deux à deux,

$$a = \sin(y, z)[A\sin(y, z) - B\sin(x, z)\cos(xz, yz) - C\sin(x, y)\cos(xy, yz)] : R^2,$$

$$b = \sin(x, z)[B\sin(x, z) - C\sin(x, y)\cos(xy, xz) - A\sin(y, z)\cos(xz, yz)] : R^2,$$

$$c = \sin(x, y)[C\sin(x, y) - A\sin(y, z)\cos(xy, yz) - B\sin(x, z)\cos(xy, xz)] : R^2,$$

où l'on a

$$R^2 = 1 - \cos^2(x, y) - \cos^2(x, z) - \cos^2(y, z) + 2\cos(x, y)\cos(x, z)\cos(y, z);$$

par conséquent l'équation (d) se change en celle-ci :

(*) Si les axes des coordonnées étaient rectangulaires, on aurait en outre entre les coefficiens A, B, C cette relation,

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1;$$

c'est ce qui a été démontré à la fin du n° 120.

$$\left.\begin{array}{l} A^2 \sin^2(y, z) + B^2 \sin^2(x, z) + C^2 \sin^2(x, y) \\ \quad - 2AB \sin(y, z) \sin(x, z) \cos(xz, yz) \\ \quad - 2AC \sin(y, z) \sin(x, y) \cos(xy, yz) \\ \quad - 2BC \sin(x, z) \sin(x, y) \cos(xy, xz) \end{array}\right\} = R^2.$$

On verra, au n° 174, une manière plus simple d'obtenir cette relation; on y trouvera aussi d'autres valeurs de R^2, à l'aide desquelles on pourrait donner d'autres formes aux équations ci-dessus. Au surplus, ceux qui éprouveront des difficultés pour tirer toutes les conséquences dont la théorie précédente est susceptible, feront bien de consulter le 1er paragraphe du n° 9 de la *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique;* ils y verront, par exemple, que si $A'x+B'y+C'z=\rho'$, est l'équation d'un plan perpendiculaire à ρ', la valeur ci-dessus de $\cos(\rho, \rho')$ qui prend cette forme symétrique..... $aA' + bB' + cC'$, exprime le sinus de l'angle formé par ce plan et la droite ρ; et que cette même valeur prise négativement est le cosinus de l'angle des deux plans que l'on considère ici.

Équation de la sphère, et problème concernant une sphère qui en coupe deux autres.

129. L'équation la plus générale d'une sphère du rayon r, rapportée à des coordonnées obliques x, y, z, est d'après le n° précédent (équat. e), et en représentant par α, β, γ les coordonnées du centre,

$$\left.\begin{array}{l} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 \\ \quad + 2(x-\alpha)(y-\beta) \cos(x, y) \\ \quad + 2(x-\alpha)(z-\gamma) \cos(x, z) \\ \quad + 2(y-\beta)(z-\gamma) \cos(y, z) \end{array}\right\} = r^2.$$

Si les axes des coordonnées étaient rectangulaires, on aurait simplement

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2,$$

et si leur origine était au centre même de la sphère, on au-

rait plus simplement encore

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

cela est évident.

Soient maintenant trois sphères c, c', c'', rapportées à des coordonnées rectangles, et ayant respectivement pour rayon r, r', r''; supposons que la première soit placée d'une manière quelconque dans l'espace, et que α, β, γ soient les coordonnées de son centre : supposons de plus que l'origine des axes soit le centre de la seconde sphère, et que l'axe des x passe par le centre de la troisième sphère, en sorte que α'' soit l'abscisse de ce centre. On aura alors les trois équations suivantes :

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2,$$
$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r'^2,$$
$$(3) \qquad (x-\alpha'')^2 + y^2 + z^2 = r''^2;$$

et dans l'hypothèse que la première sphère soit coupée par la seconde et par la troisième, les équations des plans des deux courbes d'intersection, s'obtiendront comme au n° 47, en soustrayant l'une de l'autre, d'abord (1 et 2), ensuite (1 et 3).

On aura en effet,

$$2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z = r'^2 - r^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$
$$2\alpha'' x - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z = r^2 - r''^2 + \alpha''^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2;$$

et si l'on ajoute ces deux dernières, il viendra

$$2\alpha'' x = r'^2 - r''^2 + \alpha''^2$$

ou

$$x = \frac{r'^2 - r''^2 + \alpha''^2}{2\alpha''};$$

résultat auquel on arriverait encore en supposant que les sphères (2 et 3) se coupent mutuellement.

Il suit de là que les plans des deux courbes d'intersection se rencontrent suivant une droite située dans un plan per-

pendiculaire à la ligne qui joint les centres des sphères coupantes c', c''. Ce dernier est le *plan radical* de ces mêmes sphères, et le point qui a x pour abscisse en est le *centre radical*, soit que les sphères se rencontrent, soit qu'elles ne se rencontrent pas.

Deux sphères ont aussi un *centre de similitude* et une sphère des *pôles conjugués* (n° 47). Voyez aussi les *Ann. de Math.*, tom. XI, p. 14.

Concevons maintenant quatre sphères données dans l'espace, de telle manière que leurs équations soient

$$\begin{array}{ll}
(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2 \quad \text{ou} & A=0,\\
(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+(z-\gamma')^2=r'^2 & A'=0,\\
(x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2+(z-\gamma'')^2=r''^2 & A''=0,\\
(x-\alpha''')^2+(y-\beta''')^2+(z-\gamma''')^2=r'''^2 & A'''=0;
\end{array}$$

et supposons qu'elles se coupent deux à deux ; les équations des plans des cercles d'intersection seront

$$\begin{array}{ll}
A'-A=0, & A''-A'=0,\\
A''-A=0, & A'''-A'=0,\\
A'''-A=0, & A'''-A''=0.
\end{array}$$

De ces six équations, trois quelconques se trouvant comportées par les trois autres, il s'ensuit que les plans dont il s'agit se coupent deux à deux suivant des droites qui concourent au même point; et il est remarquable que ces droites sont nécessairement dans les plans radicaux des sphères : propriété qui est une généralisation de celle énoncée au n° 47.

CHAPITRE III.

Transformation des Coordonnées dans l'espace.

130. Le changement le plus simple que l'on puisse faire à un système de coordonnées, est de déplacer l'origine en laissant les nouveaux axes parallèles aux premiers: or, si x', y', z', désignent les coordonnées positives d'un point rapporté au second système, et que a, b, c soient celles de la nouvelle origine, rapportée au système primitif, on aura

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c.$$

Mais pour embrasser, dans toute sa généralité, le problème de la transformation des axes, prenons pour premier système de coordonnées obliques, x, y, z; et pour second système, t, u, v; puis cherchons les premières coordonnées en valeurs des dernières, en considérant le unes et les autres comme étant relatives au même point de l'espace et étant rapportées à la même origine.

Pour cet effet, concevons, par exemple, par les extrémités des coordonnées v, u, t, x, des plans parallèles au plan des yz; ces plans seront au nombre de quatre, et la distance du plan yz au second sera visiblement $v \sin(v, yz)$; celle du second au troisième, $u \sin(u, yz)$; celle du troisième au quatrième, $t \sin(t, yz)$; enfin, celle du premier au quatrième, $x \sin(x, yz)$. Mais cette dernière distance se compose de la somme des trois autres; donc

$$x \sin(x, yz) = t \sin(t, yz) + u \sin(u, yz) + v \sin(v, yz);$$

pareillement

$$y \sin(y, xz) = t \sin(t, xz) + u \sin(u, xz) + v \sin(v, xz),$$
$$z \sin(z, xy) = t \sin(t, xy) + u \sin(u, xy) + v \sin(v, xy).$$

Ces formules, qui sont très simples et très symétriques, s'obtiennent, comme l'on voit, avec la plus grande facilité; elles servent toutes les fois que l'on connaît les angles que les nouveaux axes font avec les plans coordonnés primitifs. M. Français, qui a résolu le même problème en supposant que les axes des coordonnées xyz, tuv sont rapportés à six plans dont les équations aux axes rectangles sont connues, est parvenu à ces formules par un calcul analytique un peu long, mais d'ailleurs fort élégant. (*Voyez* le 14e cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, pages 182 et suivantes.) M. Hachette a aussi démontré les formules de M. Français, par des considérations déduites de la théorie des projections. (*Voyez* la *Correspondance*, 1er numéro du 2e volume.)

131. Si les axes primitifs seulement étaient rectangulaires, on aurait $\sin(z, xy) = 1, \ldots$; $\sin(t, xy) = \cos(t, z); \ldots$, et les formules dont il s'agit se réduiraient à

$$x = t \cos(t, x) + u \cos(u, x) + v \cos(v, x),$$
$$y = t \cos(t, y) + u \cos(u, y) + v \cos(v, y),$$
$$z = t \cos(t, z) + u \cos(u, z) + v \cos(v, z).$$

Ces formules particulières étant les plus usitées, nous allons les retrouver par une méthode qui nous fera connaître en même temps les relations qui existent entre les coefficiens de t, u, v.

Supposons donc qu'il s'agisse de passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques, de manière que les axes AX, AY, AZ [fig. 83], forment le premier système, et que AT, AU, AV composent le second.

Construisons sur ces derniers axes un parallélépipède AM, et désignons par

$$x'y'z', \qquad x''y''z'', \qquad x'''y'''z''',$$

les coordonnées rectangulaires des points

$$M', \qquad M'', \qquad M''',$$

comptées de l'origine A;

Par c', c'', c''', les côtés du triangle $M'M''M'''$ respectivement opposés aux angles M', M'', M''';

Par γ', γ'', γ''', les angles plans $M'''AM''$, $M''AM'$, $M''AM'$ opposés aux côtés c', c'', c''';

Enfin, par t, u, v, les arêtes ou coordonnées obliques AM', AM'', AM'''; on aura évidemment

$$\left.\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= t^2, \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= u^2, \\ x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 &= v^2, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} (x'' - x''')^2 + (y'' - y''')^2 + (z'' - z''')^2 &= c'^2, \\ (x' - x''')^2 + (y' - y''')^2 + (z' - z''')^2 &= c''^2, \\ (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 &= c'''^2. \end{aligned}\right\} (2)$$

D'un autre côté, en vertu de la propriété du triangle obliquangle, les trois triangles $M'''AM''$, $M'''AM'$, $M''AM'$, donneront respectivement

$$\left.\begin{aligned} u^2 + v^2 - 2uv \cos \gamma' &= c'^2, \\ t^2 + v^2 - 2tv \cos \gamma'' &= c''^2, \\ t^2 + u^2 - 2tu \cos \gamma''' &= c'''^2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Par conséquent, si l'on développe les premiers membres des équations (2), et que l'on substitue pour c'^2 c''^2 c'''^2 leurs valeurs précédentes, on aura, réductions faites,

$$\left.\begin{aligned} x''x''' + y''y''' + z''z''' &= uv \cos \gamma', \\ x'x''' + y'y''' + z'z''' &= tv \cos \gamma'', \\ x'x'' + y'y'' + z'z'' &= tu \cos \gamma'''. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Maintenant, considérons le point M comme étant situé d'une manière quelconque dans l'espace, et représentons par x, y, z ses coordonnées rectangles Ap, pm, mM; il est

clair, alors, que l'on aura

$$x = x' + x'' + x''', \quad y = y' + y'' + y''', \quad z = z' + z'' + z''';$$

si donc X, Y, Z; X′, Y′, Z′; X″, Y″, Z″, sont les angles que les arêtes t, u, v font avec les trois axes primitifs AX, AY, AZ, on aura évidemment

$$\left.\begin{array}{l} x' = t \cos X, \; y' = t \cos Y, \; z' = t \cos Z, \\ x'' = u \cos X', \; y'' = u \cos Y', \; z'' = u \cos Z', \\ x''' = v \cos X'', \; y''' = v \cos Y'', \; z''' = v \cos Z''; \end{array}\right\} \quad (5)$$

de là,

$$\left.\begin{array}{l} x = t \cos X + u \cos X' + v \cos X'', \\ y = t \cos Y + u \cos Y' + v \cos Y'', \\ z = t \cos Z + u \cos Z' + v \cos Z'', \end{array}\right\} \quad (6)$$

et il s'ensuivra que les équations (4) se changeront en celles-ci,

$$\left.\begin{array}{l} \cos X' \cos X'' + \cos Y' \cos Y'' + \cos Z' \cos Z'' = \cos \gamma', \\ \cos X \cos X'' + \cos Y \cos Y'' + \cos Z \cos Z'' = \cos \gamma'', \\ \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z' = \cos \gamma'''. \end{array}\right\} (7)$$

D'un autre côté, si l'on ajoute ensemble les carrés des valeurs de x', y', z', de x'', y'', z'', et de x''', y''', z''', fournies par les équations (5), on trouvera de la manière la plus simple les relations connues

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1, \\ \cos^2 X' + \cos^2 Y' + \cos^2 Z' = 1, \\ \cos^2 X'' + \cos^2 Y'' + \cos^2 Z'' = 1. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Celles-ci et les précédentes renferment toutes les conditions relatives aux nouveaux axes obliques.

On peut déduire de là l'expression du carré de la diagonale AM du parallélépipède; car soit D cette diagonale on a

$$D^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

puis faisant usage des valeurs (6), et réduisant au moyen

des relations (7) et (8), il viendra

$$D^2 = t^2 + u^2 + v^2 + 2tu \cos\gamma''' + 2tv \cos\gamma'' + 2uv \cos\gamma';$$

c'est-à-dire que le *carré de la diagonale d'un parallélépipède est égal à la somme des carrés des arêtes d'un même angle trièdre, plus à la somme faite du double des produits de ces arêtes prises deux à deux, multipliés par le cosinus de l'angle que ces mêmes arêtes forment entre elles.*

132. Si l'on voulait seulement passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre système de même nature, il suffirait de faire dans les résultats ci-dessus $\gamma' = \gamma'' = \gamma''' = 100^{gr}$; or, en vertu de cette hypothèse, et désignant d'ailleurs pour abréger, cos X, cos Y, cos Z par m, n, p, les équations (6), (7) et (8) deviennent respectivement

$$\left.\begin{aligned} x &= mt + m'u + m''v, \\ y &= nt + n'u + n''v, \\ z &= pt + p'u + p''v, \end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

$$\left.\begin{aligned} m'm'' + n'n'' + p'p'' &= 0, \\ m\,m'' + n\,n'' + p\,p'' &= 0, \\ mm' + nn' + pp' &= 0, \end{aligned}\right\} (7') \quad \left.\begin{aligned} m^2 + n^2 + p^2 &= 1, \\ m'^2 + n'^2 + p'^2 &= 1, \\ m''^2 + n''^2 + p''^2 &= 1; \end{aligned}\right\} (8')$$

ainsi, des neuf constantes qui entrent dans les formules (6'), trois seulement sont indépendantes (*).

On pourrait demander maintenant de déterminer t, u, v, en fonction de x, y, z; dans ce cas, au lieu de suivre

(*) Quelques auteurs conservent, dans leurs calculs, les dénominations de *cos*, *sin*, etc.; mais cela est inutile, surtout toutes les fois que, dans le cours d'une longue opération, les valeurs trigonométriques ne doivent éprouver aucune espèce de transformation. D'ailleurs, en représentant chacune de ces valeurs par une seule lettre, comme les autres quantités, les calculs s'effectuent bien plus rapidement. On a dû voir déjà que je me suis conformé à cette observation, lorsque je n'ai pas eu en vue de faire remarquer que telle formule était identique avec celle publiée par d'autres auteurs, ou était précisément la traduction analytique de l'énoncé d'un théorème.

la voie ordinaire de la résolution des équations du premier degré, il est plus élégant de procéder ainsi qu'il suit.

Si on multiplie respectivement par m, n, p, les valeurs de x, y, z données par les équations (6′), et qu'on ajoute les trois produits entre eux, on aura, à cause des relations (7′) et (8′),

$$t = mx + ny + pz.$$

Répétant la même opération deux autres fois de suite, en choisissant d'abord pour nouveaux multiplicateurs m', n', p', puis m'', n'', p'', les trois résultats réunis seront

$$\left.\begin{aligned} t &= mx + ny + pz, \\ u &= m'x + n'y + p'z, \\ v &= m''x + n''y + p''z; \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

et parce que, dans l'hypothèse actuelle, le carré de la distance AM est

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + u^2 + v^2,$$

on trouvera, après avoir substitué dans cette équation identique, pour t, u, v leurs valeurs précédentes, et comparé les termes homologues, ces nouvelles relations,

$$\left.\begin{aligned} mn + m'n' + m''n'' &= 0, \\ mp + m'p' + m''p'' &= 0, \\ np + n'p' + n''p'' &= 0, \end{aligned}\right\} (10) \quad \left.\begin{aligned} m^2 + m'^2 + m''^2 &= 1, \\ n^2 + n'^2 + n''^2 &= 1, \\ p^2 + p'^2 + p''^2 &= 1; \end{aligned}\right\} (11)$$

concluons de là que si l'on avait les équations

$$\begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0, & a^2 + b^2 + c^2 &= R^2, \\ aa'' + bb'' + cc'' &= 0, & a'^2 + b'^2 + c'^2 &= R'^2, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0; & a''^2 + b''^2 + c''^2 &= R''^2; \end{aligned}$$

on en déduirait celles-ci :

$$\frac{ab}{R^2} + \frac{a'b'}{R'^2} + \frac{a''b''}{R''^2} = 0, \quad \frac{a^2}{R^2} + \frac{a'^2}{R'^2} + \frac{a''^2}{R''^2} = 1,$$

$$\frac{ac}{R^2} + \frac{a'c'}{R'^2} + \frac{a''c''}{R''^2} = 0, \quad \frac{b^2}{R^2} + \frac{b'^2}{R'^2} + \frac{b''^2}{R''^2} = 1;$$

$$\frac{bc}{R^2}+\frac{b'c'}{R'^2}+\frac{b''c''}{R''^2}=0, \quad \frac{c^2}{R^2}+\frac{c'^2}{R'^2}+\frac{c''^2}{R''^2}=1,$$

puisqu'alors on aurait

$$m=\frac{a}{R}, \quad n=\frac{b}{R}, \quad p=\frac{c}{R},$$

$$m'=\frac{a'}{R'}, \quad n'=\frac{b'}{R'}, \quad p'=\frac{c'}{R'},$$

$$m''=\frac{a''}{R''}, \quad n''=\frac{b''}{R''}, \quad p''=\frac{c''}{R''}.$$

Ces résultats nous seront utiles par la suite.

133. Lagrange, qui a traité ce sujet dans sa *Mécanique analytique*, parvient à d'autres relations très remarquables, de la manière suivante. Les expressions (6′) étant considérées comme des équations linéaires en t, u, v, elles fourniront, en faisant pour abréger,

$$mn'p''-m'np''+m''np'-mn''p'+m'n''p-m''n'p=l,$$

ces trois valeurs

$$t=\frac{(n'p''-p'n'')x+(n''p-np'')y+(np'-pn')z}{l},$$

$$u=\frac{(m''p'-p''m')x+(mp''-pm'')y+(mp'-pm')z}{l},$$

$$v=\frac{(m'n''-n'm'')x+(m''n-n''m)y+(mn'-nm')z}{l};$$

lesquelles doivent être identiques à celles (9).

Ainsi, en égalant entre eux les coefficiens correspondans des coordonnées x, y, z, on aura ces nouvelles relations,

$$n'p''-p'n''=lm, \quad n''p-p''n=lm', \quad np'-pn'=lm'',$$
$$m''p'-p''m'=ln, \quad mp''-pm''=ln', \quad mp'-pm'=ln'',$$
$$m'n''-n'm''=lp, \quad m''n-n''m=lp', \quad mn'-nm'=lp'';$$

et en ajoutant les carrés des trois équations qui se trouvent

sur la même ligne horizontale, sur la 1re par exemple, il viendra, à cause des équations (11), cette autre relation,

$$(n'p'' - p'n'')^2 + (n''p - p''n)^2 + (np' - pn')^2 = l^2.$$

Mais le premier membre revient à

$$(n^2 + n'^2 + n''^2)(p^2 + p'^2 + p''^2) - (np + n'p' + n''p'')^2,$$

et se réduit à l'unité, en vertu des équations (10 et 11) : on a donc $1 = l^2$ et $l = \pm 1$.

Toutefois, la valeur de l est positive, et ce qui le prouve, c'est qu'en faisant coïncider les nouvelles coordonnées t, u, v avec les primitives x, y, z, c'est-à-dire en posant $t = x$, $u = y$, $v = z$, on a $m = 1$, $n' = 1$, $p'' = 1$, les autres coefficiens deviennent nuls, et la valeur ci-dessus de l se réduit à $+1$.

Au surplus, cette dernière relation

$$(np' - pn')^2 + (np'' - pn'')^2 + (n'p'' - p'n'')^2 = 1,$$

et les deux autres semblables, se déduisent sur le champ de considérations géométriques, et sont une conséquence toute naturelle de ce qui a été démontré aux nos 125 et 132; car il existe entre les cosinus des angles que trois plans rectangulaires font avec les plans coordonnés aussi rectangulaires, les mêmes relations qu'entre les cosinus des angles que trois droites perpendiculaires entre elles font avec trois autres axes rectangles : c'est-à-dire que si α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' sont les angles que les plans des tu, tv, uv, font respectivement avec ceux des xy, xz, yz, on a par ce qui précède,

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1, \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' &= 1, \\ \cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' &= 1, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' &= 1, \\ \cos^2\beta + \cos^2\beta' + \cos^2\beta'' &= 1, \\ \cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Mais d'après le n° 57,

$$tu \cos\gamma = y'z'' - z''y',$$
$$tv \cos\gamma' = z'y''' - y'z''',$$
$$uv \cos\gamma'' = y''z''' - z''y''.$$

Substituant dans ces équations, pour y', z', ..., leurs valeurs (5), il viendra

$$\cos\gamma = np' - pn',$$
$$\cos\gamma' = n''p - p''n,$$
$$\cos\gamma'' = n'p'' - p'n''.$$

Donc, etc.

Enfin, l'on a fait observer au n° 122 que le volume du tétraèdre trirectangle, dont les arêtes du sommet sont t, u, v, a pour expression

$$\frac{tuv}{6} = \frac{1}{6}x'(y''z''' - y'''z'') + \frac{1}{6}x''(y'''z' - y'z''')$$
$$+ \frac{1}{6}x'''(y'z'' - y''z');$$

et l'on reconnaît tout d'abord que cette expression prend, en vertu des valeurs (5), la forme suivante :

$$mn'p'' - m'np'' + m''np' - mn''p' + m'n''p - m''n'p = 1.$$

Voilà donc un moyen très simple d'obtenir ces relations.

Les trois plans coordonnés primitifs xy, xz, yz, étant rapportés au second système d'axes t, u, v, leurs équations seront respectivement

$$At + Bu + Cv = 0,$$
$$A't + B'u + C'v = 0,$$
$$A''t + B''u + C''v = 0;$$

puisque l'on ne change point d'origine. Si donc x, y, z sont les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de l'espace, coordonnées qui représentent les perpendiculaires abaissées de ce point sur les plans des yz, xz, xy, on aura, d'après le numéro 124,

$$x = -\frac{A''t + B''u + C''v}{\sqrt{A''^2 + B''^2 + C''^2}},$$

$$y = -\frac{A't + B'u + C'v}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$z = -\frac{At + Bu + Cv}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Des neuf constantes arbitraires ABC, A′ B′ C′, A″B″C″, trois sont superflues, puisque chacun des plans, passant déjà par un point donné, il suffit de deux constantes pour achever de déterminer sa situation; ainsi, l'on pourrait égaler à l'unité une des constantes de chaque plan : mais afin de ne pas détruire la symétrie des formules, soit fait

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$
$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1,$$
$$A''^2 + B''^2 + C''^2 = 1;$$

et joignons à ces relations, ces trois autres qui expriment que les plans coordonnés sont perpendiculaires entre eux, savoir :

$$AA' + BB' + CC' = 0,$$
$$AA'' + BB'' + CC'' = 0,$$
$$A'A'' + B'B'' + C'C'' = 0;$$

de cette manière, il ne restera que trois coefficiens dont on sera libre de disposer pour satisfaire à certaines conditions, et déterminer convenablement la situation des nouveaux plans coordonnés par rapport aux anciens.

On interprêtera géométriquement les coefficiens de t, u, v, dans les valeurs précédentes de x, y, z, en comparant ces valeurs avec celles (6) du n° 131.

134. Si l'on prenait l'axe des t dans le plan même des xy, et que l'on supposât toujours les deux autres axes perpendiculaires entre eux et à celui-ci, il est clair que l'on aurait $Z = 100^{gr}$. En désignant alors X par φ et Z″

par θ, on aurait $Y = 100^{gr.} - \varphi$ et $Z' = 100^{gr.} - \theta$; partant les formules (6′) deviendraient, en y faisant d'ailleurs $v = 0$, pour ne considérer que les points situés dans le plan tu,

$$\left.\begin{aligned} x &= t\cos\varphi + u\cos X', \\ y &= t\sin\varphi + u\cos Y', \\ z &= u\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (6'')$$

Dans la même hypothèse, la troisième des équations (7′) se réduirait à

$$\cos\varphi\cos X' + \sin\varphi\cos Y' = 0,$$

et la seconde des équations (8′), à

$$\cos^2 X' + \cos^2 Y' = \cos^2\theta.$$

De ces deux dernières on tire aisément les valeurs suivantes :

$$\cos X' = \sin\theta\cos\theta, \quad \text{et} \quad \cos Y' = -\cos\varphi\cos\theta.$$

Les valeurs précédentes de x, y, z sont donc

$$\left.\begin{aligned} x &= t\cos\varphi + u\sin\varphi\cos\theta, \\ y &= t\sin\varphi - u\cos\varphi\cos\theta, \\ z &= u\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (6''')$$

Telles sont les formules propres à donner l'équation aux axes rectangles de la courbe d'intersection d'une surface courbe quelconque et d'un plan. On remarquera dans ces formules, que φ est l'angle que la trace AR [fig. 84] du plan sécant TAU fait avec l'axe des x; et que θ est l'inclinaison de ce plan sur celui des xy.

135. Au lieu de prendre la ligne AR [fig. 85] pour l'axe des t, considérons-la, pour plus de généralité, comme la trace du plan des tu sur celui des xy; regardons la droite AT comme l'axe des t, et nommons ψ l'angle TAR. Dans cette circonstance, l'angle θ sera encore celui des tu avec le plan xy; mais l'angle φ désignera celui que la trace AR fait avec l'axe des x.

Maintenant, pour exprimer les valeurs de cos X, cos Y, cos Z, etc., en fonction des angles φ, ψ, θ, nous aurons recours à la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique, parce qu'elle conduit au but de la manière la plus simple et la plus directe. Pour cet effet, concevons une sphère du rayon AT = 1, et ayant son centre au point A; puis imaginons des arcs de grands cercles TQ, TR, QRS, TS; alors les côtés TR, TQ, RQ du triangle sphérique TRQ seront respectivement ψ, X, φ; et l'angle sphérique R sera $= \theta$: de sorte que l'on aura sur-le-champ par le principe du n° 76 de la *Trigonométrie* de M. Legendre, ou du n° 47 de la *Trigonométrie* de M. Lacroix,

$$\cos X = \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi \cos\theta.$$

Le triangle sphérique STR dans lequel ST = Y, TR = ψ, SR = $100^{gr.} - \varphi$, et l'angle R = $200^{gr.} - \theta$ donnera de même

$$\cos Y = \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\theta.$$

Ensuite, si par l'axe des z et celui des t on fait passer un arc de grand cercle ZTP = $100^{gr.}$, le triangle sphérique PRT sera rectangle en P et fournira cette relation,

$$\cos Z = \sin\theta \sin\psi.$$

Soit AU [fig. 86] l'axe des u perpendiculaire à celui des t; les deux triangles sphériques URQ, URS dans lesquels UQ = X', UR = $100^{gr.} + \psi$, US = Y', RS = $100^{gr.} - \varphi$, donneront aussi, en vertu du principe cité,

$$\cos X' = \cos\theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi,$$
$$\cos Y' = -\cos\psi \cos\varphi \cos\theta - \sin\psi \sin\varphi;$$

et si par les axes z, u, on conçoit un arc de grand cercle ZUL = $100^{gr.}$, le triangle sphérique rectangle URL donnera

$$\cos Z' = \cos\psi \sin\theta.$$

Soit en outre AV [fig. 87] l'axe des v perpendiculaire

au plan tu ; si l'on imagine les arcs de grands cercles VNQ, TRK, VSK, les deux triangles sphériques NQR, KSR seront visiblement rectangles, l'un en N, l'autre en K, et donneront

$$-\cos X'' = \sin\varphi \sin\theta; \quad \cos Y'' = \cos\varphi \sin\theta.$$

Enfin, il est assez évident que l'on aura

$$Z'' = \theta, \quad \text{ou} \quad \cos Z'' = \cos\theta.$$

Concluons de là que les formules (6) et (9) n° 131, deviendront respectivement

$$\begin{aligned} x &= t(\cos\theta \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi) \\ &\quad + u(\cos\theta \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi) \\ &\quad - v \sin\theta \sin\varphi, \\ y &= t(\sin\varphi \cos\psi - \cos\theta \cos\varphi \sin\psi) \\ &\quad - u(\cos\theta \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi) \\ &\quad + v \sin\theta \cos\varphi, \\ z &= t \sin\theta \sin\psi + u \sin\theta \cos\psi + v \cos\theta, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} t &= x(\cos\theta \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi) \\ &\quad + y(\sin\varphi \cos\psi - \cos\theta \cos\varphi \sin\psi) \\ &\quad + z \sin\theta \sin\psi, \\ u &= x(\cos\theta \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi) \\ &\quad - y(\cos\theta \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi) \\ &\quad + z \sin\theta \cos\psi, \\ v &= -x \sin\theta \sin\varphi + y \sin\theta \cos\varphi + z \cos\theta. \end{aligned}$$

Ce sont ces formules, employées pour la première fois par Euler, que Lagrange a données dans sa *Mécanique analytique*, tom. II, page 220, et que M. Laplace a publiées aussi dans sa *Mécanique céleste*, tom. I, pag. 59. Nous observerons cependant qu'afin de faire coïncider les résultats précédens avec ceux que M. Laplace a obtenus par la méthode des transformations successives, il faudrait ici changer ψ en φ, faire $\sin\theta$ négatif, et prendre la valeur de y en moins. Ces changemens de signes résultent seulement de la dispo-

sition des axes. Si dans nos formules on faisait $\psi = 0$, et $\nu = 0$, on retomberait sur celles (6″) du n° 134; cela est de toute évidence.

136. Ces formules générales, quoiqu'assez compliquées, sont cependant très utiles en Mécanique : elles ont cet avantage qu'elles ne dépendent que de trois arbitraires, tandis qu'il en entre neuf dans celles du n° 132. On pourrait à la vérité, comme l'a fait Monge, introduire dans ces dernières, des fonctions de trois arbitraires qui tinssent lieu des six autres qu'on voudrait faire disparaître; mais il en résulterait nécessairement des expressions radicales peu commodes dans les applications (*).

En réduisant à cinq le nombre de ces arbitraires, M. Gergonne est parvenu, par l'analyse algébrique, à de nouvelles formules rationnelles et symétriques applicables à la transformation d'un système de coordonnées rectangles à un autre système également rectangle (**). Celles-ci dérivent de cette considération, qu'un changement quelconque de situation d'un angle trièdre dans l'espace, autour de son sommet, peut être opéré par un mouvement unique de rotation autour d'un axe fixe. On les obtient très directement à l'aide du seul principe de Trigonométrie sphérique déjà employé ci-dessus.

Soient x, y, z [fig. 101], les coordonnées rectangulaires primitives, et t, u, v trois autres coordonnées rectangulaires de même origine A. Soit en outre r l'axe fixe Ar autour duquel on suppose que tourne le système primitif pour prendre la position t, u, v. Dans cette hypothèse, les angles sphériques trx, ury, vrz seront égaux et seront chacun la mesure de cette rotation. Désignons l'un de ces angles par θ, et faisons comme au n° 131,

(*) *Voyez* le *Traité de Calc. différ. et de Calc. intégr.*, par M. Lacroix, 2e édit., tome I, page 533.

(**) *Annales de Mathém.*, tome VII, page 57.

angle $(t, x) = X$, angle $(t, y) = Y$, angle $(t, z) = Z$,
angle $(u, x) = X'$, etc.
angle $(v, x) = X''$, etc.

Faisons de plus, pour abréger,

$$\cos(r, x) = a, \quad \cos(r, y) = b, \quad \cos(r, z) = c,$$
$$\sin(r, x) = \alpha, \quad \sin(r, y) = \beta, \quad \sin(r, z) = \gamma,$$
$$\cos\theta = \lambda, \quad \sin\theta = \mu;$$

nous aurons ces deux relations

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad (A)$$
$$\lambda^2 + \mu^2 = 1. \qquad (B)$$

Cela posé, le triangle sphérique trx donne, à cause que angle $(r, x) =$ angle (r, t),

$$\cos(t, x) = a^2 + \alpha^2 \cos\theta;$$

mais $\alpha^2 = 1 - a^2$, donc

$$\cos(t, x) = a^2(1 - \cos\theta) + \cos\theta.$$

Le triangle sphérique tyr donne de même, à cause que l'angle dièdre $(tr, ry) = (rx, ry - \theta)$,

$$\begin{aligned}\cos(t, y) &= ab + \alpha\beta\cos(rx, ry - \theta)\\ &= ab + \alpha\beta\cos(rx, ry)\cos\theta\\ &\quad + \alpha\beta\sin(rx, ry)\sin\theta;\end{aligned}$$

et comme le côté xy du triangle sphérique xyr est d'un quadrant, on a

$$0 = ab + \alpha\beta\cos(rx, ry),$$

d'où l'on tire

$$\alpha\beta\cos(rx, ry) = -ab,$$
$$\begin{aligned}\alpha\beta\sin(rx, ry) &= \sqrt{\alpha^2\beta^2 - a^2b^2}\\ &= \sqrt{1 - a^2 - b^2} = \pm c;\end{aligned}$$

ainsi

$$\cos(t, y) = ab(1 - \cos\theta) \pm c\sin\theta.$$

Pareillement le triangle sphérique tzr donne

$$\cos(t, z) = ac + \alpha\gamma \cos(rx, rz - \theta);$$

et comme le triangle sphérique xrz dont le côté xz est égal au quadrant, fournit cette relation

$$0 = ac + \alpha\gamma \cos(rx, rz),$$

on a de même que ci-dessus

$$\cos(t, z) = ac(1 - \cos\theta) \pm b \sin\theta.$$

Pour lever l'ambiguité des signes, considérons ces formules dans un cas particulier. Par exemple, supposons angle (t, x) $=$ angle (t, y) $=$ angle (t, z); alors l'axe de rotation r sera placé symétriquement par rapport aux axes des coordonnées xyz, et il n'y a pas de doute que quand on fera, par un tiers de rotation complète, coïncider l'axe des t avec celui des y, on aura

$$\text{angle } (t, x) = 1^{\text{Q}}, \text{ angle } (t, y) = 0, \text{ angle } (t, z) = 1^{\text{Q}},$$

ou

$$\cos X = 0, \quad \cos Y = 1, \quad \cos Z = 0,$$

et $\theta = \frac{1}{3}$ de circonférence.

Ainsi, dans la même circonstance, de l'équation (A) l'on tirera

$$a = b = c = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3},$$

et l'on aura

$$\cos\theta = \lambda = -\tfrac{1}{2}, \qquad 1 - \lambda = \tfrac{3}{2},$$
$$\sin\theta = \mu = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$
$$ab = ac = \tfrac{1}{3}, \quad c\mu = b\mu = \tfrac{1}{2},$$
$$ab(1 - \lambda) = ac(1 - \lambda) = \tfrac{1}{2};$$

ce qui donne

$$\cos(t, y) = \cos Y = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} = 1,$$
$$\cos(t, z) = \cos Z = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} = 0,$$

et prouve que pour cos Y, il faut prendre le signe supérieur, tandis que pour cos Z il faut prendre le signe inférieur.

On a donc définitivement,

$$\cos X = a^2 (1 - \lambda) + \lambda,$$
$$\cos Y = ab (1 - \lambda) + c\mu,$$
$$\cos Z = ac (1 - \lambda) - b\mu.$$

Pareillement

$$\cos X' = b^2 (1 - \lambda) + \lambda, \quad \cos X'' = c^2 (1 - \lambda) + \lambda,$$
$$\cos Y' = bc (1 - \lambda) + a\mu, \quad \cos Y'' = ca (1 - \lambda) + b\mu,$$
$$\cos Z' = ab (1 - \lambda) - c\mu, \quad \cos Z'' = bc (1 - \lambda) - a\mu.$$

Telles sont les valeurs à substituer dans les formules (6′) pour obtenir celles de M. Gergonne, dans lesquelles des cinq arbitraires a, b, c, λ, μ qui sont liées entre elles par les deux relations (A, B), les trois premières fixent la position de l'axe r de rotation à l'égard des axes primitifs x, y, z, et les deux autres déterminent la quantité de cette rotation.

Si l'on voulait passer du second système (t, u, v) au système primitif (x, y, z), il faudrait faire usage des formules (9); et la seule différence qui existerait entre celles-ci et les trois précédentes, c'est que μ aurait changé de signe. Cela tient à ce que dans la première transformation l'angle θ est considéré comme positif, et que dans la second transformation il doit être pris négativement.

137. Lorsqu'une droite R passe par l'origine des axes, et que xyz sont les coordonnées d'un de ses points, l'on a

$$x = R \cos X, \quad y = R \cos Y, \quad z = R \cos Z;$$

or des trois angles X, Y, Z, deux seulement sont indépendans, puisque l'on a la relation

$$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1.$$

Dans ces dernières formules, la droite R se nomme le *rayon vecteur* de ce point, et l'origine A est le *pôle* d'où partent les rayons vecteurs des divers points de l'espace.

Lorsqu'on projette le rayon vecteur sur l'un des plans coordonnés, sur le plan des xy, par exemple, la position de ce rayon est donnée par l'angle qu'il fait avec sa projection et par l'angle que sa projection fait avec l'axe des x. Soient en effet θ le premier angle MAM′ [fig. 88], et φ le second PAM′, et faisons de plus AM $=$ R, AM′ $= r$; on aura

$$r = \mathrm{R} \cos \theta;$$

mais

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \mathrm{R} \sin \theta,$$

puisque AP, PM′, MM′ sont les coordonnées rectangulaires du point M; donc

$$x = \mathrm{R} \cos \theta \cos \varphi, \quad y = \mathrm{R} \cos \theta \sin \varphi, \quad z = \mathrm{R} \sin \theta.$$

On tire de là, pour les valeurs des tangentes trigonométriques que les projections verticales du rayon vecteur R font avec l'axe des z,

$$\frac{x}{z} = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\sin \theta}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{\sin \theta}.$$

Si les axes des coordonnées étaient obliques entre eux, il est visible que les valeurs de r, x, y, z auraient généralement la forme

$$r = \mathrm{R}p, \quad x = rm, \quad y = rn, \quad z = \mathrm{R}q;$$

p, m, n, q, représentant alors des rapports de sinus d'angles; et de là, on tirerait, comme ci-dessus,

$$x = \mathrm{R}pm, \quad y = \mathrm{R}pn, \quad \frac{x}{z} = \frac{pm}{q}, \quad \frac{y}{z} = \frac{pn}{q}.$$

De sorte que si une droite, passant par un point donné x', y', z', était rapportée à ces mêmes axes obliques, ses équations, qui seraient

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z'),$$

se changeraient en celles-ci,

$$x - x' = \frac{pm}{q}(z - z'), \quad y - y' = \frac{pn}{q}(z - z').$$

Cette remarque trouvera son application par la suite.

CHAPITRE IV.

Discussion abrégée des Surfaces du second ordre.

138. L'équation générale du second degré entre les trois variables x, y, z, est

$$\left.\begin{array}{r} Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dzy + Exz + Fyx \\ + Gz + Hy + Kx + L \end{array}\right\} = 0. \quad (a)$$

Elle représente une surface, à moins que quelque valeur particulière des coefficiens constans ne rende toujours imaginaire l'une de ces variables. En la résolvant par rapport à z on parvient à un résultat de cette forme

$$z = -\frac{(Dy + Ex + G)}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{M};$$

puisqu'en faisant

$$D^2 - 4AB = a,\ 2(DE - 2AF) = b,\ E^2 - 4AC = c,$$
$$2(DG - 2AH) = d;\ 2(EG - 2AK) = e,\ G^2 - 4AL = f,$$

on a

$$\sqrt{M} = \sqrt{(ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f)}.$$

Il résulte de là qu'en laissant de côté la quantité radicale, l'équation restante

$$2Az + Dy + Ex + G = 0,$$

est celle d'un *plan diamétral* jouissant par rapport aux surfaces du second ordre de la même propriété que les diamètres à l'égard des courbes planes de cet ordre.

Un changement convenable des coordonnées, en simpli-

fiant l'équation (a), la rend susceptible d'être discutée avec facilité. D'abord si l'on fait

$$x = x' + a,\ y = y' + b,\ z = z' + c,$$

abc étant les coordonnées de la nouvelle origine, on obtiendra une équation de même forme que la précédente, c'est-à-dire,

$$\left.\begin{array}{l} Az'^2 + By'^2 + Cx'^2 + Dz'y' + Ex'z' + Fy'x' \\ \qquad + G'z' + H'y' + K'x' + L' \end{array}\right\} = 0\,; \qquad (b)$$

et posant

$$G' = 0,\quad H' = 0,\quad K' = 0, \qquad (c)$$

les termes affectés des premières puissances des variables disparaîtront. Ces dernières équations étant linéaires en abc, comme le prouve le résultat de la substitution indiquée, on en déduit nécessairement des valeurs réelles pour ces quantités; ainsi l'équation (b) se réduit à

$$\left.\begin{array}{l} Az'^2 + By'^2 + Cx'^2 + Dz'y' + Ex'z' \\ \qquad + Fy'x' + L' \end{array}\right\} = 0\,; \qquad (d)$$

celle-ci restant la même, en y supposant les coordonnées x', y', z' négatives, il est aisé de conclure que toute droite, menée par l'origine et interceptée par la surface, sera divisée en deux parties égales à cette origine : ce point sera donc le centre de la surface.

Il pourrait arriver cependant que certaines valeurs particulières des coefficiens qui entrent dans les équations (c), rendissent infinies les valeurs de a, b, c; dans ce cas, le centre de la surface courbe serait infiniment éloigné de l'origine des coordonnées, comme l'est celui de la parabole parmi les courbes du second ordre.

Pour donner maintenant une nouvelle direction aux axes des x', y', z' supposés rectangulaires, on fera dans l'équation (d),

$$\begin{aligned} x' &= mx'' + m'y'' + m''z'', \\ y' &= nx'' + n'y'' + n''z'', \\ z' &= px'' + p'y'' + p''z''; \end{aligned}$$

Ce qui procurera une équation de la forme

$$Mz''^2+Ny''^2+Px''^2+Qz''y''+Rx''z''+Sy''x''+T=0; \quad (d')$$

et l'on aura en vertu du n° 116 les trois relations

$$\left.\begin{aligned} m^2 + n^2 + p^2 &= 1, \\ m'^2 + n'^2 + p'^2 &= 1, \\ m''^2 + n''^2 + p''^2 &= 1. \end{aligned}\right. \quad (1)$$

Des neuf constantes qui entrent dans (d') par suite de cette substitution, et qui sont assujetties aux seules conditions (1), six seront arbitraires et rendront la transformation dont il s'agit susceptible d'être effectuée d'une infinité de manières; mais en conservant les nouveaux axes perpendiculaires entre eux, on aura de plus les trois relations suivantes (n° 132),

$$\left.\begin{aligned} mm' + nn' + pp' &= 0, \\ mm'' + nn'' + pp'' &= 0, \\ m'm'' + n'n'' + p'p'' &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

d'où l'on voit qu'il ne restera plus que trois constantes dont on pourra disposer pour chasser de (d') les rectangles des coordonnées, et par conséquent pour rendre le problème déterminé. Posant donc

$$S=0, \quad R=0, \quad Q=0,$$

et formant réellement le développement de ces derniers coefficiens, ce qui sera fort aisé, à cause de la symétrie des calculs, on aura

$$\left.\begin{aligned} 2\,App' + D(pn' + np') \\ +2\,Bnn' + E(pm' + mp') \\ +2\,Cmm' + F(nm' + mn') &= 0, \\ 2\,App'' + D(pn'' + np'') \\ +2\,Bnn'' + E(pm'' + mp'') \\ +2\,Cmm'' + F(nm'' + mn'') &= 0, \\ 2\,Ap'p'' + D(p'n'' + n'p'') \\ +2\,Bn'n'' + E(p'm'' + m'p'') \\ +2\,Cm'm'' + F(n'm'' + m'n'') &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Au lieu de combiner à la manière ordinaire les équations (1) (2) (3), pour déterminer les valeurs des neuf constantes d'où dépend la position des nouveaux axes x'', y'', z'', il est plus simple et plus élégant de procéder ainsi qu'il suit.

Soient $x = \alpha z$, $y = \beta z$ les équations de l'axe des x''; cet axe fera avec chacun des axes primitifs, des angles X, Y, Z dont les cosinus seront (n° 120)

$$\cos X = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}} = m, \quad \cos Y = \frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}} = n;$$

$$\cos Z = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}} = p;$$

ainsi on aura

$$m = \alpha p, \quad n = \beta p.$$

Pareillement $x = \alpha' z$, $y = \beta' z$ étant les équations de l'axe des y'', et $x = \alpha'' z$, $y = \beta'' z$ celles de l'axe des z'', on aura

$$\begin{aligned} m' &= \alpha' p', & n' &= \beta' p', \\ m'' &= \alpha'' p'', & n'' &= \beta'' p''. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans (3), ces relations prendront cette forme:

$$\left.\begin{aligned} &(2C\alpha + F\beta + E)\alpha' + (2B\beta + F\alpha + D)\beta' + E\alpha + D\beta + 2A = 0, \\ &(2C\alpha + F\beta + E)\alpha'' + (2B\beta + F\alpha + D)\beta'' + E\alpha + D\beta + 2A = 0, \\ &(2C\alpha'' + F\beta'' + E)\alpha' + (2B\beta'' + F\alpha'' + D)\beta' + E\alpha'' + D\beta'' + 2A = 0. \end{aligned}\right\} \quad (3')$$

Si l'on élimine α' et β' entre la 1re de ces équations et celles $x = \alpha' z$, $y = \beta' z$ de l'axe des y'', on obtiendra

$$(2C\alpha + F\beta + E)x + (2B\beta + F\alpha + D)y + (E\alpha + D\beta + 2A)z = 0. \quad (4)$$

C'est, comme l'on voit, l'équation d'un plan passant par l'origine des coordonnées, et dans lequel doit être pris l'axe des y'' pour que la transformée (d'') soit débarrassée du terme en $x''y''$. Or l'élimination de α'' et β'' entre la deuxième équation (3′) et celles $x = \alpha'' z$, $y = \beta'' z$ qui fixent la position de l'axe des z'', conduisant à la même

équation (4), il s'ensuit que si l'on trace à volonté dans le plan $y''z''$ que représente cette équation, les deux axes y'', z''; la transformée (d') n'aura plus de termes en $x''y''$ et $x''z''$. De plus la troisième équation (3') qui fait disparaître le terme en $y''z''$, laisse indéterminée l'une des quantités α' et β', lorsque l'on se donne α'' et β''; il y a donc une infinité d'axes obliques qui réduisent l'équation (d') à cette autre

$$(e) \qquad Mz''^2 + Ny''^2 + Px''^2 + T = 0.$$

Mais l'existence des relations (2) constituant la perpendicularité des nouveaux axes, on exprimera analytiquement que l'axe des x'' donné par les équations $x = \alpha z$, $y = \beta z$, est perpendiculaire au plan des $y''z''$ représenté par l'équation (4), au moyen de ces deux autres relations (n° 109):

$$2(A - B)\beta + D(\beta^2 - 1) + (E\beta - F)\alpha = 0, \qquad (5)$$

$$2(A - C)\alpha + E(\alpha^2 - 1) + (D\alpha - F)\beta = 0. \qquad (6)$$

Alors en prenant la valeur de α dans la relation (5) et la substituant dans celle (6), on aura

$$\begin{aligned}&[2(C - B)ED + (D^2 - E^2)F]\beta^3\\ &+[4(C-B)(A-B)E+(2F^2-D^2-E^2)E+2(2A-C-B)DF]\beta^2\\ &+[4(A-C)(A-B)F+(2E^2-D^2-F^2)F+2(2B-C-A)DE]\beta\\ &+2(C - A)DF + (D^2 - F^2)E = 0.\end{aligned}$$

L'inconnue β donnée par cette équation du troisième degré aura au moins une valeur réelle; par suite la relation (5) fournira également pour α une valeur réelle : ainsi l'axe des x'' déterminé de la sorte sera non-seulement perpendiculaire au plan des $y''z''$, mais en outre jouira de la propriété de priver l'équation (d') des rectangles $x''y''$, $z''z''$. D'un autre côté la direction de l'axe des y'' dépend de α' et β' : or, il n'est pas difficile de voir, d'après l'analyse précédente, et à cause de la forme des relations (3'), que β' serait donnée

par la même équation du troisième degré que nous venons de trouver. Donc cette équation a ses trois racines réelles : l'une d'elles donne β, l'autre β' et la troisième β''. Ces trois quantités trouvées, on obtiendra α, α', α'' au moyen de l'équation (5). Cette manière de prouver qu'il existe dans tous les cas un système unique d'axes rectangulaires susceptible de ramener l'équation générale (a) à la forme (e), est exposée avec beaucoup de détail dans les *Annales de Mathématiques*, tom. II, p 144. Nous engageons le lecteur à recourir, pour de plus amples éclaircissemens, à cette précieuse collection; il y verra que l'équation du troisième degré en β présente quelques particularités remarquables, lorsqu'on suppose nul séparément le coefficient de β^3, ou en même temps ce coefficient et le terme indépendant de cet angle.

139. L'équation (e) étant résolue par rapport à l'une quelconque des variables, donne deux valeurs égales et de signes contraires; ainsi la surface courbe qui résulte de cette équation est divisée en deux parties égales par chacun des plans coordonnés, et l'origine des axes $x''y''z''$, qui a pour coordonnées abc, est le centre de cette surface : cependant si l'on trouvait pour abc des valeurs infinies (n° 138), la surface serait évidemment dépourvue de centre, et l'équation (a) ne pourrait plus être ramenée à la forme que présente (e); mais voici le moyen d'obvier à cet inconvénient.

Pouvant d'abord faire disparaître, de l'équation générale (a), les rectangles des coordonnées, on tombera sur un résultat de la forme

$$(f) \qquad Az^2 + By^2 + Cx^2 + Gz + Hy + Kx + L = 0;$$

et faisant ensuite

$$z = z' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c,$$

on disposera des constantes arbitraires abc, soit pour chasser le terme tout connu, et n'avoir par conséquent que

$$Az'^2 + By'^2 + Cx'^2 + G'z' + H'y' + K'x' = 0,$$

soit pour faire disparaître trois termes, afin de parvenir à l'équation

$$(g) \qquad Az'^2 + By'^2 + Cx'^2 + K'x' = 0;$$

laquelle, quoique plus simple que (f), comprend néanmoins, comme cette dernière, toutes les surfaces du second degré.

140. Nous pouvons à présent discuter aisément ces surfaces; mais nous nous bornerons à en rappeler les propriétés les plus remarquables. Occupons-nous d'abord des surfaces qui sont comprises dans la formule

$$(e) \qquad Mz^2 + Ny^2 + Px^2 + T = 0.$$

On a déja vu (n° 186. L. C.) que les sections faites dans une surface sont très propres à en faire concevoir la nature, et qu'il convient, pour plus de simplicité, de les prendre parallèles aux plans coordonnés: nous nommerons par cette raison, *sections parallèles*, celles qui ont lieu dans cette hypothèse; quant aux traces de la surface sur les plans coordonnés, on les nomme *sections principales*. On désigne aussi sous le nom d'*axes principaux*, ceux des xyz, lorsqu'ils sont rectangulaires.

Cela posé, supposons que MNP soient positifs; et pour obtenir les sections principales de la surface, faisons successivement $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; on aura

$$\left.\begin{aligned} Mz^2 + Ny^2 + T &= 0, \\ Mz^2 + Px^2 + T &= 0, \\ Ny^2 + Px^2 + T &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (h)$$

équations qui ne donnent des ellipses réelles que lorsque T est négatif, et qui représentent celles d'un point placé à l'origine même des axes, lorsque T est nul.

Si nous imaginons en outre trois plans coupans respectivement parallèles aux plans coordonnés, leurs équations seront (n° 116)

$$x = \alpha', \qquad y = \beta', \qquad z = \gamma',$$

et par conséquent, celles des communes sections de ces nouveaux plans avec les surfaces du second ordre douées d'un centre, auront la forme

$$\left.\begin{aligned} Mz^2 + Ny^2 &= U, \\ Mz^2 + Px^2 &= U', \\ Ny^2 + Px^2 &= U''. \end{aligned}\right\} \qquad (k)$$

Ces équations appartiennent évidemment à des ellipses qui ont leurs centres sur les axes des x, y, z; mais comme α', β', γ' sont des constantes arbitraires, on conçoit que U, U', U'', qui sont des fonctions de ces constantes, peuvent devenir nuls, positifs ou négatifs. Dans le premier cas, les sections parallèles se réduisent chacune à un point; dans le second cas elles sont réelles; et dans le troisième elles sont imaginaires: ainsi la surface que nous considérons, et à laquelle on a donné le nom d'*ellipsoïde*, est limitée dans tous les sens, et est douée de six sommets réels.

Pour s'assurer *à priori* que cette surface enveloppe l'espace de toutes parts, menons un rayon vecteur quelconque par l'origine des coordonnées, et à cet effet faisons, n° 137,

$$x = mR, \qquad y = nR, \qquad z = pR;$$

à l'aide de ces valeurs l'équation (e) deviendra

$$Mp^2R^2 + Nn^2R^2 + Pm^2R^2 + T = 0,$$

et donnera

$$R = \frac{\sqrt{-T}}{\sqrt{Mp^2 + Nn^2 + Pm^2}};$$

quantité qui est toujours réelle, puisque T doit être négatif, et qui ne peut jamais devenir infinie, quelle que soit la position du rayon vecteur R.

Si deux des coefficiens M, N, P étaient égaux, que l'on eût, par exemple, $N = P$, la troisième équation (k) deviendrait $y^2 + x^2 = \frac{U}{N}$; c'est-à-dire que toutes les sections parallèles au plan des xy seraient des cercles; et comme les

deux premières équations (h) deviendraient identiques, il s'ensuit que la surface proposée serait un *ellipsoïde de révolution* autour de l'axe des z.

Lorsque $M = N = P$, l'équation (e) représente évidemment celle d'une sphère dont le centre est à l'origine, et dont le rayon $= \sqrt{\frac{-T}{M}}$ ne peut être réel que dans le cas où T est négatif.

Enfin, si l'on avait $M = 0$, l'équation

$$Ny^2 + Px^2 + T = 0,$$

serait celle d'un cylindre dont l'axe coïnciderait avec celui des z.

L'équation (e), dans laquelle on supposerait $T = -T'$, deviendrait

$$Mz^2 + Ny^2 + Px^2 - T' = 0;$$

et il est remarquable que si l'on fait dans celle-ci,

$$\frac{M}{T'} = \frac{1}{c^2}, \frac{N}{T'} = \frac{1}{b^2}, \frac{P}{T'} = \frac{1}{a^2},$$

on a $$a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2;$$

équation symétrique à l'égard des demi-axes principaux a, b, c, et qui est, par rapport aux surfaces courbes du second ordre, ce qu'est l'équation (n° 50) par rapport aux lignes du même ordre. Dans le cas où $M = N$, ou ce qui est de même, lorsque $b = c$, on a seulement

$$a^2(z^2 + y^2) + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Telle est l'équation de l'ellipsoïde de révolution : ses axes sont $2a$ et $2b$, et son axe de rotation est celui des x, ainsi qu'il est facile de s'en assurer.

Enfin, lorsque $M = N = P$, ou, ce qui est de même, quand $a = b = c$, on a simplement

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2;$$

c'est, comme l'on voit, l'équation de la surface d'une sphère du rayon a.

141. Examinons maintenant la nature de la surface contenue dans l'équation (e), lorsque quelques-uns des coefficiens sont négatifs; posons par exemple

$$(e') \qquad Mz^2 - Ny^2 - Px^2 + T = 0;$$

les *traces* de cette surface, ou ses sections principales, auront pour équations

$$\left.\begin{aligned} Mz^2 - Ny^2 + T &= 0, \\ Mz^2 - Px^2 + T &= 0, \\ Ny^2 + Px^2 - T &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (h')$$

la dernière appartient à l'ellipse, et les deux autres sont à l'hyperbole. Quant aux sections parallèles, elles seront données, comme ci-dessus, par des équations de la forme

$$\left.\begin{aligned} Mz^2 - Ny^2 &= U, \\ Mz^2 - Px^2 &= U', \\ Ny^2 + Px^2 &= U'', \end{aligned}\right\} \quad (k')$$

et donneront naissance à des courbes de même espèce que les équations (h'). Il peut arriver, dans ces équations, que T soit positif ou négatif, ce qui fait deux cas faciles à discuter; mais, dans l'un comme dans l'autre, ces surfaces indéfinies dans tous les sens sont des *hyperboloïdes* qui ont une ou deux *nappes;* par conséquent, quatre ou deux sommets réels.

Si dans l'équation (e') on fait comme précédemment

$$\frac{P}{T} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{N}{T} = \frac{1}{b^2}, \quad \frac{M}{T} = \frac{1}{c^2},$$

on aura

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2$$

pour celles de l'hyperboloïde à une nappe rapportée à ses axes principaux. Cette hyperboloïde est de révolution lorsque $N = P$, ou $a = b$; et son équation est

$$c^2(x^2 + y^2) - a^2z^2 = a^2c^2.$$

Quant à l'hyperboloïde à deux nappes, son équation est évidemment

$$a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2,$$

et l'égalité des coefficiens a, b caractérise qu'il est de révolution : dans ce cas, son équation est

$$a^2z^2 - c^2(x^2 + y^2) = a^2c^2.$$

Si l'équation (e') était réduite à

$$Mz^2 - Ny^2 + T = 0,$$

ce qui a nécessairement lieu lorsque $P = 0$, on retomberait sur l'équation d'un cylindre perpendiculaire au plan des $x\,y$, et dont la base serait une hyperbole.

Enfin, si on avait

$$Mz^2 - Ny^2 - Px^2 = 0,$$

auquel cas $T = 0$, la troisième des équations (h') appartiendrait à un point qui serait l'origine même des coordonnées; et les deux premières, qui sont en général à l'hyperbole, ne donneraient plus que des lignes droites; d'où il est aisé de conclure que, dans l'hypothèse actuelle, l'on a une surface conique dont le sommet est à l'origine des axes, et qui est asymptote à l'hyperboloïde à une nappe. On tirerait la même conséquence par rapport à l'hyperboloïde à deux nappes.

142. Pour terminer la discussion des surfaces courbes du second ordre, reprenons leur équation générale

$$(g') \qquad Az^2 + By^2 + Cx^2 + Kx = 0,$$

qui, comme il serait facile de le démontrer, renferme aussi l'ellipsoïde et l'hyperboloïde; mais afin d'en compléter l'analyse, supposons que C soit nul, on aura simplement alors

$$(g'') \qquad Az^2 + By^2 + Kx = 0;$$

et les équations des sections principales seront

$$Az^2 + By^2 = 0,$$
$$Az^2 + Kx = 0,$$
$$By^2 + Kx = 0.$$

La première ne donne qu'un point ; mais la seconde et la troisième produisent la parabole, si x ou K est négatif ; et comme les sections parallèles ont pour équations

$$Az^2 + By^2 = U,$$
$$Az^2 + Kx = U',$$
$$By^2 + Kx = U'',$$

la surface que l'on considère, et qui est dépourvue de centre, prend le nom de *paraboloïde elliptique*. L'hypothèse $A = B$ la rend de révolution.

Lorsque A et B sont de signes différens, l'une des sections principales est le système de deux droites, et les sections parallèles correspondantes sont des hyperboles. Quant aux deux autres sections principales, elles restent de nature parabolique, et c'est pour cette raison que la surface proposée est celle du *paraboloïde hyperbolique*. Elle n'a pas non plus de centre, mais elle est douée de deux plans asymptotes, passant par les droites dont il s'agit, et par l'axe des x. Cette surface se trouve aussi donnée par l'équation

$$xy + Gz = 0;$$

car, premièrement, toute section parallèle au plan des xy, ayant pour équation

$$xy + G\gamma = 0,$$

en faisant dans la précédente $z = \gamma$, on reconnaît qu'elle est représentée par une hyperbole rapportée à ses asymptotes (n° 50) ; secondement, toute section faite par un plan qui passe par l'axe des z et dont la trace sur le plan des xy est $y = Px$, se trouve être une parabole ayant évidemment pour équation

$$Px^2 + Gz = 0.$$

Lorsqu'une droite s'appuie sur deux autres, et reste, dans toutes ses positions, parallèle à un plan, elle engendre le paraboloïde hyperbolique.

Enfin, le cylindre à base parabolique répond au cas où l'un des coefficiens A, B est nul, dans l'équation (g'').

En discutant de la même manière l'équation

$$Az^2 + Hy + Kx = 0,$$

on s'assurera qu'elle donne lieu aussi au cylindre parabolique; car d'une part les traces ou sections principales de la surface sont

$$Az^2 + Hy = 0,$$
$$Az^2 + Kx = 0,$$
$$Hy + Kx = 0;$$

et de l'autre part, les sections respectivement parallèles à ces traces sont

$$Az^2 + Hy = U,$$
$$Az^2 + Kx = U',$$
$$Hy + Kx = U'',$$

U, U′, U″ variant d'une section à l'autre. Or, on voit, par ces deux groupes d'équations, que toutes les coupes parallèles aux plans des xz et yz sont des paraboles égales, tandis que celles qui correspondent au plan des xy sont des lignes droites parallèles entre elles. On reconnaît donc par là le caractère distinctif des surfaces cylindriques.

Il est bon de remarquer que toutes les sections parallèles faites dans une surface du second degré sont semblables, et que si une telle surface est rapportée à des coordonnées obliques, son équation sera de même forme que par rapport à ses axes rectangles.

Ce que nous venons de dire, touchant les surfaces du second degré, n'est qu'un fragment d'une théorie complète exposée avec beaucoup de détails dans les ouvrages cités au commencement du n° 116; mais cela suffit dans ce Recueil.

CHAPITRE V.

De la recherche de l'équation d'une surface du second ordre, d'après la loi connue de sa description.

143. On a vu, dans le chapitre précédent, comment, par la discussion d'une équation du second degré entre trois variables, on découvre la surface individuelle qu'elle représente : nous allons passer maintenant à la solution du problème inverse, en suivant la méthode même de Monge ; c'est-à-dire que nous allons déterminer, d'après la loi connue de la description d'une surface, la relation qui existe entre les coordonnées de ses points.

Solution relative aux surfaces cylindriques.

Toute droite qui, en parcourant une courbe quelconque, se meut parallèlement à elle-même, engendre une surface cylindrique : or, cette droite a pour équations

$$x = az + \alpha,$$
$$y = bz + \beta,$$

et quelle que soit sa position à l'égard des plans coordonnés, les coefficiens a, b seront invariables (n° 119), mais les quantités α, β, qui sont constantes pour une même position de la génératrice, varient lorsque cette ligne passe d'une position à une autre. Ces quantités, qui sont constantes ou variables ensemble, sont donc fonction l'une de l'autre, c'est-à-dire que

$$\beta = f(\alpha),$$

le signe f étant celui d'une fonction quelconque ; mais les équations précédentes donnent

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = x - az, \\ \beta = y - bz, \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha = x - az, \\ f(\alpha) = y - bz; \end{array}\right\} \quad (1)$$

donc l'équation générale des surfaces cylindriques est

$$y - bz = f(x - az).$$

Lorsque l'on connaîtra analytiquement la nature de la courbe qui dirige le mouvement de la droite génératrice, la forme de la fonction f sera déterminée ; car, si $F(x, y, z) = 0$, et $F_{,}(x, y, z) = 0$ sont les équations de cette courbe (*), et que l'on y joigne les équations (1), on aura ces quatre

$$\begin{array}{ll} F(x, y, z) = 0, & F_{,}(x, y, z) = 0, \\ x - az = \alpha, & y - bz = f(\alpha), \end{array}$$

lesquelles auront nécessairement lieu en même temps pour tous les points où la génératrice touchera la courbe donnée, ou, ce qui revient au même, quelle que soit la valeur de α. Ainsi en éliminant x, y, z, entre ces quatre équations, et remettant dans le résultat pour α et $f(\alpha)$ leurs valeurs, on aura l'équation de la surface cylindrique individuelle cherchée.

Supposons, pour exemple, que la droite génératrice parcoure la courbe d'intersection de deux sphères dont les équations aux coordonnées rectangles sont

---

(*) Si trois élémens consécutifs d'une courbe ne sont jamais dans un même plan, cette courbe est dite à *double courbure* : quelle que soit son espèce, elle peut toujours être considérée comme l'intersection de deux surfaces ; c'est pour cette raison que l'on exprime la position d'une courbe au moyen de deux équations à trois variables et qui ont lieu simultanément.

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2, \\ x^2 + y^2 + (z - \gamma)^2 &= r'^2, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

la première sphère ayant son centre à l'origine, et la seconde l'ayant sur l'axe des z, à une distance γ de cette origine. Reprenant les équations de la génératrice censée donnée de direction, on aura

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - az, \\ \beta &= y - bz; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

si l'on soustrait les équations (1) l'une de l'autre, on obtiendra après le développement,

$$z = \frac{r^2 - r'^2 + \gamma^2}{2\gamma}.$$

Faisant, pour simplifier, le second membre $= m$, on aura $z = m$, et substituant cette valeur dans la première équation (1), il viendra

$$x^2 + y^2 = r^2 - m^2.$$

Dans la même hypothèse les équations (2) se changeront en

$$x = \alpha + am,$$
$$y = \beta + bm;$$

ajoutant ensemble celles-ci, après les avoir élevées au carré, on aura, en vertu de la précédente,

$$(\alpha + am)^2 + (\beta + bm)^2 = r^2 - m^2.$$

Enfin, éliminant α et β au moyen de leurs valeurs (2), et développant, on trouvera pour équation de la surface cylindrique individuelle cherchée,

$$x^2 + y^2 + (a^2 + b^2)z^2 - 2axz - 2byz + 2amx + 2bmy$$
$$- 2m(a^2 + b^2)z = r^2 - m^2 - (a^2 + b^2)m^2.$$

Si, dans cette équation, l'on fait $z = m$, la résultante

$$x^2 + y^2 = r^2 - m^2,$$

sera, sur le plan des xy, l'équation de la projection de l'intersection de la surface cylindrique et d'un plan mené perpendiculairement à l'axe des z, à une distance m de l'origine.

En faisant $z = 0$ on obtient la section principale faite par le plan des xy. Cette section a pour équation

$$x^2 + y^2 + 2amx + 2bmy = r^2 - m^2 - (a^2 + b^2)m^2;$$

mais en transportant l'origine au centre, pour faire disparaître les premières puissances de x et de y, on a

$$x'^2 + y'^2 = r^2 - m^2,$$

comme ci-dessus.

Enfin, lorsque la droite génératrice est parallèle à la ligne des z, on a $a = b = 0$, et l'on retombe encore sur l'équation précédente, comme cela doit être.

Solution relative aux surfaces coniques.

144. Si une droite passe constamment par le même point et glisse le long d'une courbe quelconque, elle engendrera une surface conique. Cela posé soient $a\,b\,c$ les coordonnées fixes du sommet; les équations de la génératrice seront

$$x - a = \alpha(z - c),$$
$$y - b = \beta(z - c),$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \frac{x - a}{z - c}, \qquad \beta = \frac{y - b}{z - c}.$$

Pour une même position de cette droite les coefficiens α, β sont constans; mais ils varient lorsque la génératrice passe d'une position à une autre: ces coefficiens sont donc fonction l'un de l'autre: ainsi l'on a

$$\beta = f(\alpha),$$

f indiquant une fonction quelconque: par conséquent l'é-

quation générale des surfaces coniques est

$$\frac{y-b}{z-c} = \frac{f(x-a)}{z-c}.$$

Il résulte de là, et du numéro précédent, que si $F(x, y, z)$, $F_1(x, y, z)$ sont les équations de la courbe à double courbure qui dirige le mouvement de la génératrice, ces quatre équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad F_1(x, y, z) = 0,$$
$$\frac{x-a}{z-c} = \alpha, \qquad \frac{y-b}{z-c} = f(\alpha),$$

auront lieu en même temps pour tous les points communs à la génératrice et à la courbe; c'est-à-dire, quelle que soit la valeur de α. On parviendra donc, par l'élimination, à une équation unique qui sera celle de la surface conique individuelle demandée. Cherchons d'après ces principes l'équation du cône oblique à base circulaire.

Soient a, b, c les coordonnées du sommet du cône, dont la base horizontale est un cercle, et supposons que l'origine des axes soit au centre de ce cercle. Les deux projections de la droite génératrice sont en général, par ce qui précède,

$$\alpha = \frac{x-a}{z-c}, \qquad \beta = \frac{y-b}{z-c}. \qquad \text{(A)}$$

Quant à la courbe individuelle qui dirige le mouvement de cette génératrice, elle peut être considérée comme l'intersection d'une sphère et d'un plan : or, dans cette circonstance, la sphère et le plan, qui est celui des xy, ont pour équations respectives

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \qquad z = 0. \qquad \text{(B)}$$

Ces quatre équations devant avoir lieu en même temps, celles (A) deviendront, à cause de $z = 0$,

$$\alpha = \frac{x-a}{-c}, \qquad \beta = \frac{y-b}{-c};$$

d'où l'on tire aisément

$$x^2 = (a - \alpha c)^2, \quad y^2 = (b - \beta c)^2.$$

Substituant ces valeurs dans la première équation (B), qui se réduit à $x^2 + y^2 = r^2$, on aura

$$b^2 + \beta^2 c^2 - 2bc\beta + a^2 + \alpha^2 c^2 - 2a\alpha c = r^2;$$

et mettant ici pour β et α leurs valeurs (A), il viendra

$$\left.\begin{array}{l} c^2\left(\dfrac{y-b}{z-c}\right)^2 - 2bc\left(\dfrac{y-b}{z-c}\right) \\ +c^2\left(\dfrac{x-a}{z-c}\right)^2 - 2ac\left(\dfrac{x-a}{z-c}\right) \end{array}\right\} = r^2 - (a^2 + b^2). \quad \text{(C)}$$

Telle est l'équation cherchée de la surface conique.

Si le sommet du cône était dans le plan même des xz, on aurait $b = 0$, et l'équation précédente deviendrait

$$\frac{c^2y^2}{(z-c)^2} + c^2\frac{(x-a)^2}{(z^2-c)^2} - 2ac\frac{(x-a)}{z-c} = r^2 - a^2.$$

Si, de plus, ce sommet était dans l'axe vertical des z, on aurait $a = 0$, et par conséquent l'équation du cône droit à base circulaire serait

$$\frac{c^2y^2}{(z-c)^2} + \frac{c^2x^2}{(z-c)^2} = r^2.$$

Lorsque la base du cône droit est une ellipse, on a $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ pour équation de cette base; et alors l'équation précédente, dans laquelle on peut faire $z - c = z'$, pour transporter l'origine des coordonnées au sommet du cône, devient, en faisant d'ailleurs $m = \frac{a}{c}$, $n = \frac{b}{c}$,

$$m^2y^2 + n^2x^2 = m^2n^2z'^2.$$

C'est sous cette forme très simple qu'Euler, dans son *Introductio in analysin infinitorum*, a présenté l'équation du cône à base elliptique.

En plaçant de même l'origine des axes au sommet du cône oblique, l'équation (C) se simplifie et devient, à cause de $x' = x - a$, $y' = y - b$, $z' = z - c$,

$$(a^2+b^2-r^2)z'^2 + c^2(x'^2+y'^2) - 2acx'z' - 2bcy'z' = 0. \quad (D)$$

Nous aurons occasion, par la suite, de faire usage de ce résultat.

145. Appliquons maintenant la théorie du n° 113 à la recherche de l'équation de la surface d'un cône droit situé d'une manière quelconque par rapport aux plans coordonnés rectangulaires: pour cet effet supposons que l'axe ρ de ce cône passant par l'origine des coordonnées, fasse avec les axes des x, y, z des angles dont les cosinus soient respectivement a, b, c; le plan perpendiculaire à cet axe ρ, et qui pourra être considéré comme celui de la base du cône, aura alors pour équation

$$\rho = ax + by + cz.$$

Supposons en outre que de l'un des points de la circonférence de cette base, ayant pour coordonnées x, y, z, on ait abaissé sur ρ une perpendiculaire; que de plus r soit l'angle que la génératrice du cône fait avec son axe; on aura, par la propriété du triangle rectangle,

$$\rho = \cos r \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

égalant donc ces deux valeurs, il vient de suite pour équation de la surface conique cherchée

$$(ax + by + cz)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\cos^2 r.$$

Si l'axe du cône coïncidait avec celui des z, on aurait $a = b = 0$, $c = 1$, et par suite

$$z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\cos^2 r.$$

Il suit de là, que deux cônes donnés par les équations

$$(ax + by + cz)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\cos^2 r,$$
$$z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\cos^2 r'',$$

se couperaient suivant deux droites passant par l'origine des coordonnées et situées dans un plan dont l'équation proviendrait de l'élimination de la fonction $x^2+y^2+z^2$, c'est-à-dire serait

$$(ax+by)\cos r''=z(\cos r-c\cos r'').$$

Solution relative aux surfaces de révolution.

146. Quelle que soit la nature de la courbe génératrice d'une surface de révolution, lorsqu'on coupe cette surface par un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, l'on obtient, pour section, une circonférence de cercle dont le centre est dans l'axe, et dont tous les points sont par conséquent à égale distance d'un autre point pris sur cet axe; ainsi en représentant par

$$x=Az+a,\qquad y=Bz+b,$$

les équations de l'axe de révolution, le plan qui lui sera perpendiculaire aura pour équation (n° 124)

$$Ax+By+z=\delta;$$

la quantité δ, qui détermine la position du plan, étant constante pour le même plan perpendiculaire, et variable d'un plan à un autre.

Maintenant si l'on prend le point où l'axe de révolution rencontre le plan des xy, pour le centre commun d'une suite de sphères concentriques, ce centre aura visiblement pour coordonnées, $x=a$, $y=b$, $z=0$, et l'équation générale des surfaces sphériques, dont le rayon indéterminé $=\gamma$, sera

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=\gamma^2.$$

Or les courbes faites sur la surface de révolution, par des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, peuvent être censées les mêmes que celles qui seraient produites par les surfaces sphériques dont il s'agit; les quantités δ, γ sont

donc constantes pour tous les points de la même courbe d'intersection, mais elles varient lorsqu'on passe d'une intersection à l'autre; ainsi les valeurs de δ et de γ^2 sont fonction l'une de l'autre, et l'équation générale des surfaces de révolution est

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=f(\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+z);$$

f indiquant une fonction quelconque dont la forme dépend de la nature de la courbe génératrice.

a et b sont nuls, lorsque l'axe de rotation passe par l'origine; alors l'équation précédente devient

$$x^2+y^2+z^2=f(\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+z),$$

et l'on a de plus $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{B}=0$, lorsque cet axe coïncide avec la ligne des z. Dans ce cas, l'équation des surfaces de révolution se réduit à

$$x^2+y^2+z^2=f(z),$$

ou à

$$z=\varphi(x^2+y^2),$$

les signes f et φ désignant des fonctions quelconques.

Pour déterminer, dans l'équation générale des surfaces de révolution, la forme de la fonction arbitraire, il faut connaître les équations de la courbe qui engendre la surface que l'on considère: les équations

$$\mathrm{F}(x,y,z)=0, \qquad \mathrm{F}_1(x,y,z)=0,$$
$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+z=\delta, \quad (x-a)^2+(y-b)^2+z^2=f(\delta),$$

seront donc celles qu'il faudra combiner entre elles, pour obtenir l'équation de la surface individuelle cherchée.

Proposons-nous, pour exemple, de trouver l'équation du sphéroïde engendré par la révolution d'une ellipse autour de son petit axe $2b$. La courbe génératrice étant plane, ses équations seront

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$
$$z=0;$$

on aura, en outre, par ce qui précède,

$$y = \delta,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2,$$

$y = \delta$ étant l'équation d'un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, et la dernière, celle d'une sphère dont le centre est à l'origine des coordonnées.

Ces quatre équations doivent avoir lieu simultanément pour que la surface proposée soit de révolution; si donc on élimine entre elles, x, y z, on aura

$$a^2b^2 - a^2\delta^2 + b^2\delta^2 = b^2\gamma^2;$$

et si l'on substitue ici pour δ^2 et γ^2 leurs valeurs, la surface du sphéroïde de révolution sera donnée par l'équation

$$b^2z^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2;$$

résultat qui, en y changeant a en b et x en y, rentre dans celui du n° 140.

On nomme *aplatissement* d'un ellipsoïde de révolution, la différence α des demi-axes, l'un d'eux étant pris pour unité. Si donc, dans l'équation précédente, on introduit cet aplatissement, en posant $b = a(1 - \alpha)$, il viendra

$$(1 - \alpha)^2 z^2 + (1 - \alpha)^2 x^2 + y^2 = a^2 (1 - \alpha)^2,$$

ou en développant, négligeant les termes en α^2, et faisant $a = 1$, pour simplifier,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2\alpha(x^2 + z^2 - 1) = 0;$$

ou en général

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2\alpha u' = u = 0;$$

α étant supposé un très petit coefficient, et u' étant une fonction de x, y, z. C'est sous cette forme que l'auteur de la *Mécanique céleste* considère l'équation de la surface de la terre. On trouvera, dans mon *Traité de Géodésie*, tom. II, diverses applications importantes de cette équation.

Solution relative à la surface engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur trois autres droites fixes.

147. *Première solution.* Quoique l'on puisse, en général, placer comme on voudra les axes des coordonnées par rapport aux trois droites fixes qui dirigent le mouvement de la génératrice, on conçoit que pour abréger les calculs, les directions de ces axes doivent être telles, que les équations des droites soient les plus simples possibles; or, c'est ce qui arrivera en prenant pour axe des x la première droite fixe, pour axe des y la perpendiculaire à cette première et à la seconde droite, et pour axe des z la perpendiculaire au plan zy.

Cela posé, les équations de la deuxième droite fixe sont

$$x = az, \qquad y = b;$$

celles de la troisième droite,

$$x = mz + n, \quad y = pz + q;$$

et les équations de la droite mobile qui est assujettie à passer constamment par l'axe des x, sont de la forme

$$x = \mathrm{A}z + \mathrm{B}, \qquad y = \mathrm{C}z,$$

A et B étant des fonctions de C qu'il s'agit de déterminer. Si ces quantités étaient connues, en éliminant C entre ces deux dernières équations, l'on aurait celle de la surface engendrée par la droite mobile : or, cette ligne devant s'appuyer sur les deuxième et troisième droites, il en résulte (n° 121) les équations de condition suivantes:

$$\mathrm{BC} + b(\mathrm{A} - a) = 0,$$

$$(\mathrm{B} - n)(\mathrm{C} - p) + q(\mathrm{A} - m) = 0,$$

desquelles on tire

$$\mathrm{A} = \frac{n\mathrm{C}^2 + (qm - np - ab)\mathrm{C} + abp}{bp + (q - b)\mathrm{C}},$$

$$B = \frac{b(aq - mq + np) - bnC}{bp + (q - b)C}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations de la droite mobile, ensuite éliminant C, et ordonnant, il viendra cette équation du second degré en x, y, z,

$$abpz^2 + ny^2 - (ab + np)yz - bpxz + (b - q)xy - bny + (baq - bmq + bnp)z = 0. \quad (1)$$

La *surface gauche* ou *réglée* engendrée par le mouvement de cette droite est donc du second ordre.

Voici un des moyens de se convaincre que cette surface peut être engendrée de deux manières différentes par une droite mobile; ce qui est le caractère distinctif de l'hyperboloïde à une nappe.

Soient généralement

$$x = Az + B,$$
$$y = Cz + D,$$

les équations de cette génératrice : pour qu'elle soit tout entière sur la surface de l'équation (1), il faut que cette équation, après y avoir mis pour x et y leurs valeurs actuelles, ait lieu indépendamment de z. Aussi, en égalant séparément à zéro les coefficiens de z^2, de z et le terme constant, dans le résultat de la substitution indiquée, trouve-t-on trois équations de condition entre les quatre quantités A, B, C, D, dont la combinaison conduit à des valeurs réelles de A, B, C, en fonction de l'arbitraire D; valeurs qui indiquent qu'il existe effectivement deux manières différentes de produire avec une droite la surface dont il s'agit.

Deuxième solution. L'équation (1) n'est pas symétrique, parce que les équations desquelles nous sommes partis ne le sont pas elles-mêmes. Il n'en serait pas ainsi, en rapportant les points de la surface cherchée à des axes parallèles aux trois droites données ; mais alors le calcul devient

un peu plus compliqué. En effet, soient dans l'hypothèse présente, t, u, v les coordonnées d'un point quelconque de la surface. Les équations des trois droites données et rapportées à des axes obliques, seront,

pour la première, parallèle à v, $\quad t = f, \quad u = f'$;
pour la seconde, parallèle à u, $\quad v = g, \quad t = g'$;
pour la troisième, parallèle à t, $\quad u = h, \quad v = h'$;

f, f', g, g', h, h' étant des quantités constantes et données.

Si, comme on en est le maître, on représente par

$$u = \mathrm{M}t + \mathrm{N}, \qquad v = \mathrm{M}'t + \mathrm{N}'$$

les équations des deux projections de la droite mobile, la troisième projection sera donnée par l'équation

$$\mathrm{M}'u - \mathrm{M}v = \mathrm{M}'\mathrm{N} - \mathrm{M}\mathrm{N}';$$

et comme cette droite s'appuie constamment sur les trois droites fixes, on a nécessairement ces relations (n° 121), $f' = \mathrm{M}f + \mathrm{N}$, $g = \mathrm{M}'g' + \mathrm{N}'$, $\mathrm{M}'h - \mathrm{M}h' = \mathrm{M}'\mathrm{N} - \mathrm{M}\mathrm{N}'$, qui serviront à faire connaître trois des quantités M, N, M', N'.

D'abord on trouvera aisément

$$\mathrm{N} = \frac{fa - f't}{f - t}, \qquad \mathrm{N}' = \frac{g'v - gt}{g' - t};$$

ensuite

$$\mathrm{M} = \frac{ff' - f't - fv + f't}{f^2 - fu}, \qquad \mathrm{M}' = \frac{gg' - gt - g'v + gt}{g'^2 - g'u};$$

et parce qu'en égalant les deux valeurs de $\mathrm{M}'\mathrm{N} - \mathrm{M}\mathrm{N}'$, on a

$$\mathrm{M}'h - \mathrm{M}h' = \mathrm{M}'u - \mathrm{M}v,$$

il s'ensuit que la surface engendrée par la droite mobile, est

$$\left.\begin{array}{r} tu(h' - g) + uv(g' - f) + vt(f' - h) \\ + t(gh - f'h') + u(fg - g'h') + v(fh - f'g') \\ + f'g'h' - fgh \end{array}\right\} = 0.$$

C'est ainsi que ce problème se trouve résolu dans l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie*, par Monge et Hachette. On y trouvera une manière d'opérer différente de celle dont nous venons de nous servir, pour reconnaître les deux modes de génération dont est susceptible la surface donnée par la dernière équation ci-dessus.

L'hyperboloïde à une nappe a cela de commun avec les autres surfaces du second degré, qu'elle peut être engendrée de deux manières différentes, par un cercle variable de rayon, et dont le plan reste parallèle à lui-même.

Si l'on conservait la direction des axes et qu'on transportât l'origine des coordonnées au point α, β, γ, les termes linéaires en t, u, v de l'équation précédente disparaîtraient en faisant

$$\alpha = \frac{g'+f}{2}, \qquad \beta = \frac{f'+h}{2}, \qquad \gamma = \frac{h'+g}{2};$$

puisqu'en général

$$t = t' + \alpha, \quad u = u' + \beta, \quad v = v' + \gamma;$$

alors on aurait simplement

$$\left.\begin{array}{l} t'u'(h'-g) + t'v'(f'-h) + u'v'(g'-f) \\ \qquad + \frac{1}{4}(h'-g)(f'-h)(g'-f) \end{array}\right\} = 0,$$

ou, en supposant

$$g'-f = \mathrm{A}, \quad f'-h = \mathrm{B}, \quad h'-g = \mathrm{C},$$

on aurait plus simplement encore,

$$\frac{t'}{\mathrm{A}} \cdot \frac{u'}{\mathrm{B}} + \frac{u'}{\mathrm{B}} \cdot \frac{v'}{\mathrm{C}} + \frac{t'}{\mathrm{A}} \cdot \frac{v'}{\mathrm{C}} + \frac{1}{4} = 0.$$

M. Hachette ayant considéré de nouveau les propriétés de la surface dont il s'agit, a reconnu et démontré dans le supplément de sa *Géométrie descriptive* (année 1822) que *le centre du parallélépipède construit sur trois droites quelconques d'un hyperboloïde à une nappe est aussi le centre de cet hyperboloïde.*

CHAPITRE VI.

Méthode générale pour mener des plans tangens aux surfaces courbes, et applications de cette méthode.

148. Si l'on imagine un plan tangent à une surface courbe quelconque, et une suite de plans qui passent par le point de contact, de manière que ceux-ci coupent la surface et le plan tangent, les sections faites sur la surface courbe auront respectivement pour tangentes, ces droites qui sont les intersections des plans coupans et du plan tangent.

Réciproquement, si tant de droites qu'on voudra sont tangentes à une surface courbe, et ne forment qu'un seul et même contact, elles seront dans le plan tangent à cette surface; car s'il en était autrement, on pourrait par un des points d'une courbe plane mener deux tangentes à cette courbe, ce que l'on sait être impossible.

Pour obtenir l'équation du plan tangent, il ne s'agit donc que d'exprimer algébriquement qu'une droite est assujettie à passer par un point d'une surface, et à lui être tangente dans toutes ses situations possibles. La méthode que nous allons exposer étant générale, nous nous occuperons seulement de déterminer l'équation du plan tangent aux surfaces du second ordre. L'équation de ces surfaces est, par le n° 139,

$$Mz^2 + Ny^2 + Px^2 + M'z + N'y + P'x + K = 0; \quad (E)$$

et lorsque x', y', z', sont les coordonnées d'un de leurs

points, on a évidemment

$$Mz'^2 + Ny'^2 + Px'^2 + M'z' + N'y' + P'x' + K = 0. \quad (2)$$

D'un autre côté, les équations des projections d'une droite menée à volonté par ce point, sont

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z'). \quad (3)$$

Ensuite, pour transporter l'origine des axes à ce même point, et rapporter ceux de la surface courbe à des coordonnées polaires (n° 137), on fera dans l'équation (1),

$$x = R\cos\theta\cos\varphi + x', \; y = R\cos\theta\sin\varphi + y', \; z = R\sin\theta + z',$$

ou, pour abréger,

$$x = Rpm + x', \quad y = Rpn + y', \quad z = Rq + z';$$

on aura par ce moyen,

$$\left.\begin{array}{l} M\,(Rq + z')^2 + N\,(Rpn + y')^2 + P\,(Rpm + x')^2 \\ + M'\,(Rq + z') + N'\,(Rpn + y') + P'\,(Rpm + x') \end{array}\right\} + K = 0.$$

Le développement de cette équation sera visiblement de la forme

$$\mu R^2 + \eta R + \xi = 0, \quad \text{ou} \quad R\,(\mu R + \eta) + \xi = 0.$$

Or, si la droite que l'on considère devient tangente à la surface, on aura $R = 0$; par conséquent $\xi = 0$; et c'est précisément la relation (2), comme le confirme le résultat du développement : on aura donc pour équation de condition du contact,

$$\eta = 0,$$

c'est-à-dire, en ne prenant dans le développement dont il s'agit, que les termes qui multiplient la première puissance de R,

$$2Mqz' + 2Npny' + 2Ppmx' + M'q + N'pn + P'pm = 0.$$

Divisant tout par q, et faisant attention que, par le n° 137, $\frac{pm}{q} = a$, $\frac{pn}{q} = b$, il viendra

$$2Mz' + 2Nby' + 2Pax' + M' + N'b + P'a = 0. \quad (4)$$

Cette équation étant la seule qui existe entre a et b, il s'ensuit que la position de la tangente est absolument arbitraire. Nous pouvons faire disparaître ces quantités; car les équations (3) donnant $a = \frac{x-x'}{z-z'}$, $b = \frac{y-y'}{z-z'}$, on a

$$(2Mz' + M')(z - z') + (2Ny' + N')(y - y') + (2Px' + P')(x - x') = 0.$$

Puis effectuant les multiplications indiquées et réduisant à l'aide de la relation (2), on parvient à ce résultat plus simple,

$$\left.\begin{array}{l}(2Mz' + M')z + (2Ny' + N')y + (2Px' + P')x \\ \quad + M'z' + N'y' + P'x' + 2K\end{array}\right\} = 0; \quad (T)$$

lequel ne peut varier, puisqu'il se trouve dégagé des quantités qui particularisent la tangente, pourvu cependant que cette droite, quelle que soit d'ailleurs sa direction, passe constamment par le même point de la surface courbe. De plus, puisque xyz n'entrent ici qu'à la première puissance, les tangentes aux surfaces du second ordre, et qui ont un contact commun, sont toutes dans un plan qui jouit lui-même de la propriété de toucher ces surfaces : l'équation précédente est donc celle du plan tangent.

Il est utile, dans les applications, d'avoir une règle de Mnémonique, au moyen de laquelle on puisse retrouver de suite l'équation (T) du plan tangent; la voici :

Changez dans l'équation (1) de la surface courbe, x^2, y^2, z^2 en $x'x, y'y, z'z$;

Changez de même dans l'équation (2) relative au point de contact, x'^2, y'^2, z'^2 en $x'x, y'y, z'z$;

Enfin, ajoutez ces deux équations ainsi modifiées, et vous aurez l'équation (T).

Lorsqu'on se propose de mener un plan tangent à une

surface courbe du second ordre par un point extérieur donné $x''y''z''$, l'équation (T), qui ne change pas de forme, devient

$$\left.\begin{array}{r}(2Mz' + M')\,z'' + (2Ny' + N')\,y'' + (2Px' + P')\,x'' \\ + M'z' + N'y' + P'x' + 2K\end{array}\right\} = 0,$$

$x'y'z'$ étant les coordonnées inconnues du point de contact.

En combinant cette équation avec celle de la surface, on ne peut obtenir que les valeurs de deux de ces coordonnées en fonction de la troisième, ou, ce qui est de même, on arrive aux équations des projections de la courbe de tous les points de contact possibles. Ainsi, la question actuelle est susceptible d'une infinité de solutions; et il est à propos de remarquer qu'une droite qui passerait constamment par le point donné, et qui, dans son mouvement, ne cesserait de toucher la surface courbe, engendrerait un cône tangent à cette surface dans tous les points de contact dont il vient d'être parlé. Si le point donné était lumineux, la courbe déterminée par tous ces points, serait celle qui sépare la partie ombrée de la partie éclairée. On voit donc par là comment peut être résolu le problème général des ombres; mais nous reviendrons sur ce sujet.

Dans l'équation précédente du plan tangent, les coordonnées x', y', z', sont celles des points communs à ce plan et à la surface touchée; cette équation est donc aussi celle du plan de la courbe de contact, lorsque x', y', z' sont considérées comme les coordonnées courantes de ce second plan. On a vu au n° 55 une particularité semblable pour les lignes courbes.

Il n'est pas besoin de faire remarquer que si les points de l'espace étaient rapportés à des coordonnées obliques, les équations des surfaces du second ordre, et celles de leurs plans tangens, seraient de même forme que par rapport à des axes rectangles.

149. Si un plan tangent à la sphère, dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

devait passer par le point extérieur $x''y''z''$, on aurait pour l'équation de ce plan, ou pour celle du plan de la courbe de contact,

$$xx'' + yy'' + zz'' = r^2;$$

ôtant celle-ci de la première, il restera

$$x^2 - xx'' + y^2 - yy'' + z^2 - zz'' = 0;$$

et par conséquent,

$$\left(x - \frac{x''}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y''}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{z''}{2}\right)^2 = \frac{x''^2 + y''^2 + z''^2}{4}.$$

Cette équation étant celle d'une sphère dont les coordonnées du centre sont $\frac{x''}{2}$, $\frac{y''}{2}$, $\frac{z''}{2}$, et le rayon..... $= \sqrt{\frac{x''^2 + y''^2 + z''^2}{4}}$, il s'ensuit que si l'on joint le centre de la sphère donnée et le point connu, la sphère qui sera décrite sur cette droite, comme diamètre, coupera la première suivant une circonférence de cercle, qui sera le lieu de tous les points de contact cherchés, et dont la projection, sur le plan des xy, aura pour équation

$$x^2 + y^2 + \frac{(r^2 - xx'' - yy'')^2}{z''^2} = r^2.$$

Lorsque $z'' = 0$, on a simplement

$$r^2 = xx'' + yy'';$$

c'est-à-dire que la courbe de contact est dans un plan perpendiculaire à celui des xy, ce qui est en effet évident.

Le plan tangent serait déterminé de position, s'il devait passer par une droite donnée $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$; car on aurait entre les coordonnées $x'y'z'$ du point de contact ces trois relations (n°s 117 et 126).

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2,$$
$$\alpha x' + \beta y' = r^2,$$
$$ax' + by' + z' = 0,$$

desquelles on déduirait en quantités connues les valeurs de ces coordonnées. Mais la solution de ce problème devient très simple en prenant pour plan des xy celui qui contient la droite donnée et le centre de la sphère, et pour axe des x la ligne perpendiculaire à cette même droite. En effet, la trace du plan tangent sur celui des xy, laquelle a pour équation $x'x + y'y = r^2$, devant dans ce cas coïncider avec la droite donnée $x = m$, on a nécessairement $y' = 0$ et.. $x' = \frac{r^2}{x} = \frac{r^2}{m}$. Substituant ces valeurs dans l'équation de la sphère, il vient

$$z' = \pm \frac{r\sqrt{m^2 - r^2}}{m}.$$

Ainsi l'on mènera par le point où la droite donnée coupe l'axe des x, deux tangentes au cercle r, et la moitié de la corde joignant les points de contact sera la cote ou coordonnée verticale de l'un de ces points. Il est de toute évidence que ce problème admet deux solutions.

La normale à une surface courbe étant la droite qui, passant par le point de contact, est perpendiculaire au plan tangent, c'est-à-dire à toutes les droites tracées dans ce plan, ses équations seront

$$x - x' = -\frac{1}{a}(z - z'),\quad y - y' = -\frac{1}{b}(z - z'),$$

en désignant par $x'y'z'$ les coordonnées du point de contact.

Or, pour toute surface de révolution et du second ordre, donnée par la formule $Mz^2 + Ny^2 + Mx^2 + K = 0$, n° 148, on a, en faisant successivement y et $x = 0$ dans la relation (T) du n° précédent, et en ayant égard à l'observation qui commence le n° 124,

$$a = -\frac{z'}{x'}, \qquad b = -\frac{Mz'}{Ny'},$$

puisque, dans les équations (1) et (1), $M' = N' = P' = e^{y}$ et $M = P$. Partant, les équations des projections de la normale deviennent

$$xz' = x'z, \quad y - y' = \frac{Ny'}{Mz'}(z - z').$$

Ainsi, en vertu de la première équation, dans laquelle on lit que la projection sur le plan des xz passe par l'origine, on doit conclure que la normale rencontre l'axe des y, ou celui de rotation; c'est même ce qui a lieu pour toute surface de révolution.

Résolvons maintenant la question suivante :

PROBLÈME.

150. *Mener un plan tangent à une sphère, et qui soit en même temps assujetti à être parallèle à un autre plan donné.*

Soit

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2 \tag{1}$$

l'équation de la sphère; celle du plan tangent sera

$$x''x' + y''y' + z''z' = r^2, \tag{2}$$

x'', y'', z'' étant les coordonnées du point par lequel passe le plan proposé, et x', y', z' étant celles des points de la surface sphérique, comptées du centre. On aura en outre pour l'équation du plan donné

$$z = ax + by + c. \tag{3}$$

Celle (2) pouvant s'écrire ainsi,

$$z'' = -\frac{x'}{z'}x'' - \frac{y'}{z'}y'' + \frac{r^2}{z'}, \tag{4}$$

il faudra, pour que les deux plans soient parallèles, qu'on

ait les relations

$$a = \frac{-x'}{z'}, \qquad b = \frac{-y'}{z'},$$

ou bien

$$z' = \frac{-x'}{a}, \qquad z' = \frac{-y'}{b},$$

et par conséquent

$$y' = \frac{bx'}{a}.$$

Comme il est permis de prendre pour axe des x la ligne qui passe par le point donné, on a, à ce point, $y'' = z'' = 0$, et pour lors l'équation (2) donne

$$x' = \frac{r^2}{x''}.$$

De là, on conclut aisément que,

$$z = \frac{-r^2}{ax''}, \qquad y' = \frac{br^2}{ax''};$$

substituant ces valeurs dans (1), et réduisant, on a

$$r^2a^2 + b^2r^2 + r^2 = a^2x''^2,$$

d'où l'on tire

$$x'' = \frac{r\sqrt{1 + a^2 + b^2}}{a}.$$

On détermine les coordonnées du contact à l'aide de l'équation (1); en effet, en y substituant les valeurs ci-dessus de y' et z' en fonction de x'', on obtient

$$x' = \frac{ar}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}};$$

et par suite

$$y' = \frac{br}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \qquad z = \frac{r}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Pour trouver l'expression de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan tangent, il faut faire attention qu'à ce point, $x'' = y'' = z'' = 0$: or, en général, la longueur de la perpendiculaire est (n° 124)..... $\frac{z'' - ax'' - by'' - c}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$; et pour le cas actuel, on a simplement

$$\frac{-c}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Mais l'équation (4) donne $c = \frac{r^2}{z'}$, z' étant la coordonnée verticale du point de contact; par conséquent l'expression de la perpendiculaire devient

$$-\frac{r^2}{z'\sqrt{1 + a^2 + b^2}};$$

et si l'on y met pour z' sa valeur $\frac{r}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$, on aura r pour résultat. Donc le rayon qui passe par le point de contact est perpendiculaire au plan tangent : vérité démontrée dans tous les élémens de Géométrie, et qui se vérifie d'une manière fort élégante par l'Analyse.

PROBLÈME.

151. *Trouver le centre d'une sphère qui en touche une autre, ainsi qu'un plan donné de position, et qui passe en même temps par un point donné.*

Pour simplifier les calculs, plaçons l'origine des axes au centre de la sphère connue, et supposons que le plan des x, y soit parallèle au plan donné. Cela posé, soient x, y, z les coordonnées du centre cherché, a, b, c celles du point connu, d la distance de ce plan donné au plan des x, y, enfin r et u les rayons respectifs des sphères connue et cherchée; on

aura, pour la condition du contact des deux sphères,

$$x^2 + y^2 + z^2 = (r + u)^2;$$

pour celle du contact du plan et de la sphère cherchée,

$$z - d = u;$$

et pour exprimer que la surface de cette sphère passe par le point donné,

$$(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 = u^2.$$

Ainsi le problème est indéterminé, puisque l'on a moins d'équations que d'inconnues.

Les deux premières équations combinées entre elles pour éliminer u, donnent

$$x^2 + y^2 = r^2 + d^2 - 2dz + 2rz - 2dr. \qquad (1)$$

La seconde et la troisième équation combinées de la même manière, fournissent

$$a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 - 2ax - 2by - 2cz = d^2 - 2dz;$$

et si l'on soustrait ces deux résultats l'un de l'autre, il viendra

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ax - 2by - 2cz = -2rz + 2dr - r^2. \qquad (2)$$

Les deux équations (1) et (2) peuvent se mettre sous les formes suivantes :

$$x^2 + y^2 + 2(d - r)z = r^2 + d^2 - 2dr, \qquad (1')$$
$$2ax + 2by + 2(c - r)z = a^2 + b^2 + c^2 + r^2 - 2dr. \qquad (2')$$

Si l'on éliminait successivement y et z entre celles-ci, on aurait les équations des projections verticale et horizontale de la courbe plane sur laquelle sont situés tous les centres des sphères qui résolvent la question. Il est visible, par la nature de ces dernières équations (1'), (2'), que cette courbe résulte de l'intersection d'un paraboloïde de révolution et d'un plan, et que l'axe du paraboloïde est vertical et passe par l'origine des axes.

Afin de faire encore une application de la méthode des

plans tangens, nous résoudrons les deux questions suivantes, dont la première est relative aux ombres.

PROBLÈME.

152. *Trouver l'équation d'un plan tangent à deux sphères données de grandeur et de position.*

Supposons, ce qui est toujours possible, que le centre de la première sphère soit à l'origine des axes rectangulaires, et que celui de la seconde sphère soit au point a, b, c; on aura, pour les équations respectives de ces sphères,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2,$$
$$(x'' - a)^2 + (y'' - b)^2 + (z'' - c)^2 = r'^2,$$

et pour celles des plans qui leur sont respectivement tangens,

$$(1) \qquad xx' + yy' + zz' = r^2,$$
$$(x - a)(x'' - a) + (y - b)(y'' - b) + (z - c)(z'' - c) = r'^2;$$

ou bien

$$(1') \quad z = -\frac{x'}{z'}x - \frac{y'}{z'}y + \frac{r^2}{z'},$$

$$z = -\frac{x'' - a}{z'' - c}x - \frac{y'' - b}{z'' - c}y + \frac{a(x'' - a) + b(y'' - b) + c(z'' - c) + r'^2}{z'' - c}.$$

Ces dernières équations doivent être identiques pour que les deux plans coïncident; mais d'ailleurs, en exprimant que la perpendiculaire abaissée du centre de la seconde sphère sur le plan tangent à la première sphère est égale à r', on parviendra de la manière la plus simple à l'équation du plan touchant en même temps ces deux sphères.

En effet, les coordonnées du centre du cercle r' étant abc, la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan (1) aura pour expression

$$P = \pm \frac{ax' + by' + cz' - r^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}};$$

et puisque $P = r'$, et que $x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2$, on a, en prenant le signe inférieur pour indiquer que les sphères sont entre le plan tangent et le plan des xy,

$$(2) \qquad ax' + by' + cz' = r(r - r').$$

Il est remarquable que x', y', z' étant les coordonnées du point où le plan touche dans une situation quelconque la première sphère, cette équation est celle du plan de la courbe de contact sur cette sphère. Si l'on en tire

$$\frac{ax'}{z'} = \frac{r(r - r')}{z'} - \frac{by'}{z'} - c,$$

et qu'on substitue cette valeur dans (1), il viendra, à cause de $z' = \sqrt{r^2 - x'^2 - y'^2}$,

$$z = \frac{-[r(r - r') - by' - c]\,x - ay'y + ar^2}{a\sqrt{r^2 - x'^2 - y'^2}}.$$

Telle est l'équation du plan tangent aux deux sphères, et dont la position dépend des coordonnées x', y'. Lorsqu'on prend, non-seulement pour plan des x, y celui qui passe par les centres des deux sphères, mais encore pour axe des x la droite qui joint ces deux points, on a $b = 0$, $c = 0$; et cette équation devient

$$z = \frac{ar^2 - r(r - r')x - ay'y}{\sqrt{a^2r^2 - r^2(r - r')^2 - a^2y'^2}}, \qquad (E)$$

à cause de $x' = \dfrac{r(r - r')}{a}$ que fournit dans la même hypothèse la relation (2). Cette valeur de x' prouve que les lignes de contact sont dans des plans perpendiculaires à l'axe des x passant par les centres des deux sphères; car on aurait de même, relativement à la seconde sphère,

$$x'' - a = \frac{r'}{a}(r - r').$$

Nous ferons observer que l'équation (E) acquiert une forme plus simple, en y introduisant les coordonnées α, β du point où la tangente commune aux deux cercles r, r' touche le premier cercle. En effet, avec un peu d'attention, l'on obtient

$$z = \frac{r^2 - \alpha x - y'y}{\sqrt{\beta^2 - y'^2}}. \qquad (E') \ (*)$$

Il est possible de trouver un résultat qui convienne à la fois à tous les plans tangens, c'est-à-dire de parvenir à l'équation de la surface conique qui enveloppe les deux sphères : en voici le moyen.

Si dans (E) l'on fait y et $z = 0$, et qu'on ait égard aux deux situations différentes du plan tangent par rapport aux sphères, on aura, pour l'abscisse du point d'intersection de ce plan et de l'axe des x,

$$x = \frac{ar}{r \mp r'} = m. \qquad (3)$$

(*) Remarquons, en passant, que si le plan (E) devait aussi toucher une troisième sphère du rayon r'', et dont les coordonnées du centre fussent a', b', 0, on aurait la relation

$$a'x' + b'y' = r(r - r''), \qquad (2')$$

qui donnerait, en vertu de la valeur précédente de x',

$$y' = \frac{r'(r - r'')}{b'} - \frac{a'r(r - r')}{ab'}.$$

On voit par là quel changement il faudrait faire à l'équation (E) pour qu'elle représentât celle d'un plan touchant trois sphères; ce qui peut avoir lieu de huit manières différentes; mais il est plus simple d'employer son équivalente (E'), dans laquelle la coordonnée y' représente dans ce cas la perpendiculaire à l'axe des x, abaissée du point d'intersection des deux cordes qui joignent, dans le cercle r, les points de contact des couples de tangentes menées symétriquement aux cercles rr' et aux cercle rr''.

Or, ce plan, dans toutes ses situations possibles, touche la première sphère suivant une circonférence de cercle, résultante de la commune section de cette sphère et d'un plan perpendiculaire aux x, mené à $x' = \frac{r}{a}(r \mp r')$ de distance de l'origine des coordonnées : la question est donc réduite à chercher l'équation de la surface conique engendrée par une droite qui tourne autour d'un point donné sur l'axe des x, par l'abscisse (3), et qui passe constamment par tous les points de la courbe d'intersection des deux surfaces

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2, \\ x &= \frac{r}{a}(r \mp r'). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Cela posé, les équations des projections de la génératrice étant généralement (n° 144)

$$\frac{x-a}{z-c} = \alpha, \qquad \frac{y-b}{z-c} = \beta,$$

deviennent, dans la circonstance actuelle,

$$\frac{x-m}{z} = \alpha, \qquad \frac{y}{z} = \beta. \qquad (5)$$

Combinant celles-ci avec les précédentes, on trouvera aisément

$$x^2 = \frac{r^2}{a^2}(r \mp r')^2, \quad y^2 = z^2\beta^2, \quad z^2 = \frac{(x-m)^2}{\alpha^2}.$$

Si l'on introduit maintenant ces valeurs dans la première équation (4), et que l'on élimine m, on obtiendra un résultat qui, étant décomposé en facteurs, sera

$$\alpha^2\left[\frac{(r \mp r')^2 - a^2}{a^2}\right] + \left[\beta^2 + 1\right]\left[\frac{(r \mp r')^2 - a^2}{(r \mp r')a}\right]^2 = 0.$$

De plus, si l'on réduit tout les termes au même dénominateur, et que l'on remplace α et β par leurs valeurs (5),

on aura, réduction faite,

$$[(r \mp r')x - ar]^2 + (y^2 + z^2)[(r \mp r')^2 - a^2] = 0.$$

Voilà l'équation que nous avions en vue de trouver : en la considérant par rapport au signe supérieur, elle appartient au cône circonscrit aux deux sphères, et dont le sommet est sur le prolongement de la droite qui joint les centres; mais en prenant le signe inférieur, elle appartient au cône dont le sommet est entre les deux sphères. Si l'une d'elles était un corps lumineux, et que l'autre fût un corps opaque éclairé par le premier, la partie pure de l'ombre serait déterminée par le premier cône, et la partie de la pénombre le serait par le second cône. Il est évident que cette conséquence est générale, quelles que soient d'ailleurs les équations des surfaces des deux corps que l'on considère. Monge est le premier qui ait résolu le problème général des ombres. Les observations importantes dans lesquelles ce savant géomètre est entré à ce sujet, ne pouvant qu'intéresser les amateurs de l'Analyse et de la Géométrie descriptive, nous les engageons à consulter les *Mémoires des Savans étrangers*, t. IX.

Lorsque, dans l'équation ci-dessus, l'on fait $z = 0$, on a

$$y = \pm \frac{(r - r')x - ar}{\sqrt{a^2 - (r - r')^2}};$$

d'où l'on voit que les traces de la surface conique sur le plan xy, sont deux droites placées symétriquement à l'égard de l'axe des x, et que leur point d'intersection, qui est en même temps le sommet du cône, est donné par l'abscisse $x = \frac{ar}{r - r'}$, comme on l'a trouvé ci-dessus, et au n° 55.

Il résulte de là, 1°. que si un plan est tangent à trois sphères, il touchera en même temps les trois cônes circonscrits aux sphères prises deux à deux; 2°. que les sommets

de ces cônes, situés sur la commune section de ce plan et de celui qui passe par les centres des sphères seront toujours en ligne droite; propriété qui donne nécessairement lieu au théorème du n° 80, et que les considérations de la Géométrie dans l'espace font aisément découvrir.

PROBLÈME.

153. *Déterminer l'équation d'un plan tangent à deux cônes droits ayant même sommet.*

Deux cônes droits C, C″ ont par hypothèse leur sommet à l'origine des coordonnées rectangles; l'axe du second C″ coïncide avec celui des z; mais l'axe du premier a une direction quelconque connue par les cosinus a, b, c, des angles qu'il fait respectivement avec ceux des x, y, z. Si donc les angles générateurs de ces cônes sont r, r'', les équations de leurs surfaces seront (n° 145)

$$(ax + by + cz)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\cos^2 r, \qquad (1)$$

$$z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\cos^2 r''. \qquad (2)$$

Or, tout plan passant par l'origine des axes a généralement pour expression (n° 122)

$$Dx + Ey + Fz = 0, \qquad (3)$$

et l'on peut supposer, d'après le n° 128, que les coefficiens D, E, F, sont liés entre eux par la relation

$$D^2 + E^2 + F^2 = 1. \qquad (4)$$

Si ce plan touche extérieurement les deux cônes dont il s'agit, ou, ce qui est de même, s'il les laisse d'un même côté, il faudra prendre positivement $\sin r$ et $\sin r''$. Dans ce cas, et à cause que les axes des cônes C, C″ font respectivement les angles r, r'' avec le plan tangent, on a (n° 128) ces deux équations

$$aD + bE + cF = \sin r, \qquad (5)$$

$$F = \sin r'', \qquad (6)$$

lesquelles étant jointes à la précédente (4) feront connaître D, E, F : elles montrent donc que le problème est du second degré, et qu'il existe par conséquent deux plans tangens communs aux deux cônes.

Si l'on suppose que x, y, z soient les coordonnées de l'une ou de l'autre ligne de contact cherchée, les équations (3, 5, 6) auront lieu en même temps, et fourniront par leur combinaison les valeurs suivantes :

$$D = \frac{(\sin r - c \sin r'')y + bz \sin r''}{ay - bx},$$

$$E = -\frac{(\sin r - c \sin r'')x + az \sin r''}{ay - bx},$$

$$F = \sin r'',$$

qu'il faudra substituer dans (4), afin d'obtenir

$$\left.\begin{array}{l}[(\sin r - c \sin r'')y + bz \sin r'']^2 \\ + [(\sin r - c \sin r'')x + az \sin r'']^2\end{array}\right\} = (ay - bx)^2 \cos^2 r'';$$

c'est-à-dire l'équation d'une surface dont les intersections avec l'un des cônes détermineront les lignes de contact avec les deux plans qui touchent à la fois extérieurement les cônes C″ et C.

En la développant, puis la multipliant par $\cos^2 r''$, et réduisant au moyen de la relation $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, qui est la même que celle (4) ; enfin, en ayant égard à l'équation (2), et complétant un certain carré, on parviendra définitivement à ce résultat fort simple,

$$(ax + by) \cos^2 r'' = z (c \sin r'' - \sin r) \sin r''. \qquad (7)$$

Telle est l'équation du plan touchant à la fois les deux cônes dont il s'agit. C'est ainsi que M. Gergonne a résolu ce problème. (*Ann. de Math.*, tom. IV, p. 358). Nous prouverons au n° 189, qu'il y a moyen d'arriver plus directement au même résultat.

THÉORÈME.

154. *Lorsqu'une sphère, dont le centre et le rayon varient, touche constamment trois sphères fixes, 1°. ce centre parcourt une courbe du second ordre dont le plan est à la fois perpendiculaire à celui qui contient les centres des trois sphères fixes, et à la droite sur laquelle se trouvent les sommets des trois cônes circonscrits à ces mêmes sphères fixes; 2°. la courbe formée par les points de contact de la sphère mobile et de chacune des sphères fixes est un petit cercle de cette dernière sphère.*

Désignons par r, r', r'' les rayons des sphères fixes, et par R le rayon de la sphère mobile; plaçons l'origine des axes rectangles au centre de la première sphère, et représentons généralement par a, b, c; a', b', c'; X, Y, Z, les coordonnées des centres des sphères r', r'', R; mais pour rendre les calculs plus simples, supposons $b = 0$, $c = 0$, $c' = 0$; on aura, en considérant les contacts supérieurs au plan des xy, et d'après le n° 117,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (R + r)^2, \qquad (1)$$

$$(X - a)^2 + Y^2 + Z^2 = (R + r')^2, \qquad (2)$$

$$(X - a')^2 + (Y - b')^2 + Z^2 = (R + r'')^2. \qquad (3)$$

De la première équation soustrayant successivement la seconde et la troisième, puis éliminant R entre les deux restes, on obtiendra un résultat indépendant de ce rayon variable et de la coordonnée Z, savoir :

$$[a'(r - r') - a(r - r'')]X + b'(r - r')Y$$

$$= (a'^2 + b'^2 + r^2 - r''^2)\left(\frac{r - r'}{2}\right)$$

$$- (a^2 + r^2 - r'^2)\left(\frac{r - r''}{2}\right);$$

équation qui peut s'écrire plus simplement en y introdui-

sant les abscisses des points où les axes radicaux des cercles r, r' et r'' coupent chacun en particulier l'axe des x. En effet, il est clair, par ce qui a été démontré au n° 129, que la première abscisse

$$\alpha = \frac{a^2 + r^2 - r'^2}{2a},$$

et que la seconde abscisse

$$\alpha' = \frac{a'^2 + b'^2 + r^2 - r''^2}{2a'};$$

ainsi l'on a

$$\left.\begin{aligned} &[a'(r - r') - a(r - r'')]\,X + b'(r - r')\,Y \\ &\quad = a'\alpha'(r - r') - a\alpha(r - r''). \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

C'est l'équation d'un plan perpendiculaire à celui des xy, puisqu'elle est indépendante de Z. Si l'on en tirait la valeur de X et qu'on la substituât dans (1), ensuite qu'on éliminât du résultat le rayon $R = \frac{2aX - a^2 + r'^2 - r^2}{2(r - r')}$, on arriverait à une équation du second degré entre Y et Z, qui représenterait, sur le plan des yz, la projection de la courbe parcourue par le centre de la sphère mobile; donc cette courbe est plane et du second ordre, et son plan est perpendiculaire à celui des centres des trois sphères fixes.

D'un autre côté il résulte de la remarque contenue dans la note de la page 328, que l'équation de la trace horizontale du plan tangent aux trois sphères fixes, est

$$b'(r - r')x + [a(r - r'') - a'(r - r')]y = ab'r;$$

or, en comparant cette équation à la précédente (A), on reconnaît que ce plan et cette droite sont perpendiculaires l'une l'autre, n° 124.

Désignons maintenant par x', y', z' les coordonnées du point où la sphère mobile touche le premier cercle; on aura évidemment ces relations,

$$\frac{x'}{X} = \frac{y'}{Y} = \frac{z'}{Z} = \frac{r}{r+R};$$

d'où

$$R = \frac{r(X - x')}{x'};$$

et comme les équations (1, 2) soustraites l'une de l'autre donnent

$$2R(r - r') = 2aX - a^2 + r'^2 - r^2,$$

on a, en éliminant R,

$$2X = \frac{x'[a^2 - (r - r')^2]}{ax' - r(r - r')};$$

et par suite

$$2Y = \frac{y'[a^2 - (r - r')^2]}{ax' - r(r - r')}.$$

Ces valeurs changent l'équation (A) en une autre également linéaire en $x'y'$, et qui démontre par conséquent la deuxième partie du théorème énoncé.

Il existe huit séries de sphères qui peuvent toucher trois sphères données, et dont les centres mobiles sont distribués sur quatre courbes différentes.

La solution du problème où il s'agit de déterminer une sphère qui en touche quatre autres données de grandeur et de position dans l'espace, est naturellement une conséquence de celle qui précède. En effet, si l'on construit par les méthodes de la Géométrie descriptive les plans qui contiennent les centres des sphères mobiles touchant les sphères données, prises trois à trois, ces plans se couperont en un point commun qui sera le centre de la cinquième sphère cherchée; mais voyez à cet égard la *Géométrie descriptive* de M. Hachette, page 172. Enfin, si l'on cherche parmi les sphères mobiles celles qui ont leurs centres dans le plan de celui des centres de trois sphères fixes avec lesquelles elles forment contact, ces centres seront ceux des cercles touchant à la fois trois cercles donnés.

CHAPITRE VII.

Problèmes et théorèmes dont les solutions ou les démonstrations sont fondées sur la théorie précédente.

---

155. Voici encore diverses propositions de Géométrie à trois dimensions, qui peuvent être traitées par l'analyse élémentaire, et dont quelques-unes sont des généralisations de certaines propositions que nous avons données dans la section précédente. Comme le Journal de l'École Polytechnique, la Correspondance sur cette école et les Annales de Mathématiques, fournissent une ample moisson de problèmes et de théorèmes de ce genre, nous ne présenterons guère ici que ceux qui ont été l'objet de nos propres recherches, ou qui donnent lieu à des calculs simples.

PROBLÈME.

Connaissant les aires de deux sections parallèles faites dans la sphère, et la distance de ces sections, trouver le rayon de la sphère, et le volume du segment qui a ces mêmes sections pour bases.

Les sections de la sphère étant des cercles, on aura leurs rayons par l'une des formules du n° 22 ; et si, par le centre de la sphère, on mène un plan perpendiculaire aux sections dont il s'agit, ce plan coupera ces sections suivant deux cordes parallèles qui seront respectivement les diamètres de ces mêmes sections : ainsi la question sera d'abord réduite à dé-

terminer le rayon d'un grand cercle de la sphère, connaissant les longueurs des cordes parallèles, et leur plus courte distance.

[Fig. 89]. Cela posé, soient Mm, $M'm'$ les diamètres des sections de la sphère; et désignons par $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ les coordonnées des points M, M'; par z' la flèche BP'; par h l'intervalle PP'; enfin, par r le rayon cherché AB; on aura $\alpha = r - z' - h$, $\alpha' = r - z'$. Or, par la propriété du cercle, on a

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2 + \beta^2 = r^2,\\ \alpha'^2 + \beta'^2 = r^2,\end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{r}(r - h - z')^2 + \beta^2 = r^2,\\ (r - z')^2 + \beta'^2 = r^2;\end{array}\right\} \text{ (A)}$$

développant et prenant la différence de ces deux dernières équations, on trouve

$$z' = \frac{\beta'^2 - \beta^2}{2h} + r - \frac{h}{2};$$

mais soit, pour simplifier,

$$\frac{\beta^2 - \beta'^2}{h} = u,$$

on aura

$$z' = -\frac{u}{2} + r - \frac{h}{2};$$

substituant cette valeur dans la seconde équation (A) réduite, on obtiendra

$$4r^2 = 4\beta'^2 + (u + h)^2.$$

Ce résultat est précisément l'expression de la propriété du triangle rectangle qui a $2r$ pour hypoténuse, et dont les deux côtés de l'angle droit sont $2\beta'$ et $u + h$: donc, si au point m' on élève m' N perpendiculairement à la plus petite corde $M'm'$, et que l'on prenne QN égale à la quatrième proportionnelle aux trois lignes m'Q, MQ, Qm, c'est-à-dire $= \frac{\beta^2 - \beta'^2}{h}$; la droite NM', sera le diamètre demandé.

Il s'agit maintenant de trouver l'expression du volume du segment sphérique MM′ $m'm$. Or, le segment sphérique à une seule base étant la différence du secteur circulaire au cône qui a pour base celle du segment, et dont le sommet est au centre de la sphère, il s'ensuit que le segment sphérique MBm a pour mesure $\pi z^2 (r - \frac{1}{3} z)$, et que celle du segment sphérique M′Bm' est $\pi z'^2 (r - \frac{1}{3} z')$; z et z' désignant respectivement les flèches BP, BP′. Le volume du segment MM′$m'm$, que l'on considère, est donc

$$V = \pi r (z^2 - z'^2) - \tfrac{1}{3} \pi (z^3 - z'^3).$$

Mais $h = z - z'$, par conséquent,

$$V = \pi h \left[r(z + z') - \tfrac{1}{3} (z^2 + zz' + z'^2) \right].$$

D'ailleurs l'équation du cercle, en plaçant l'origine au point B, donnant (n° 47)

$$\beta^2 = 2rz - z^2, \quad \beta'^2 = 2rz' - z'^2,$$

on a

$$\beta^2 + \beta'^2 = 2r (z + z') - (z^2 + z'^2);$$

d'où l'on tire

$$r (z + z') = \frac{\beta^2 + \beta'^2 + z^2 + z'^2}{2},$$

et cette valeur étant substituée dans celle de V, on trouve

$$V = h \left(\frac{\pi \beta^2 + \pi \beta'^2}{2} \right) + \frac{\pi h^3}{6}.$$

C'est-à-dire que *le volume du segment sphérique à deux bases parallèles a pour mesure la demi-somme de ces bases multipliée par son épaisseur, plus le volume de la sphère dont cette épaisseur est le diamètre.*

PROBLÈME.

156. *Trouver la perspective d'une droite donnée dans l'espace.*

Si par l'œil et par la droite donnée on conçoit un plan in-

défini, ce plan pénétrera un tableau interposé entre l'œil et la droite, suivant une ligne qui sera la perspective ou l'apparence de la droite donnée. Le problème à résoudre se réduit donc à trouver d'abord les équations de ces deux surfaces, et ensuite celle de la trace du plan visuel sur le tableau ou le *plan perspectif*.

Les équations de la droite donnée sont

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta;$$

et en supposant l'œil à l'origine des coordonnées rectangles, le plan passant par ce point aura généralement pour équation

$$(1) \qquad Ax + By + z = 0;$$

mais comme ce plan doit passer aussi par le point où la droite dont il s'agit perce le plan des xy, point qui a évidemment pour coordonnées

$$z = 0, \quad x = \alpha, \quad y = \beta,$$

l'équation (1) fournira cette relation

$$(2) \qquad A\alpha + B\beta = 0,$$

entre les coefficiens A, B qu'il faut déterminer.

D'un autre côté, toute droite parallèle à celle donnée, et passant par l'origine des axes, a pour équations

$$x = az, \quad y = bz;$$

et puisque le plan (1) doit contenir cette seconde droite, on aura cette autre relation ou équation de condition

$$(3) \qquad Aa + Bb + 1 = 0.$$

Opérant alors sur (2 et 3) par voie d'élimination, il viendra

$$A = \frac{-\beta}{a\beta - \alpha b}, \quad B = \frac{\alpha}{a\beta - \alpha b};$$

et substituant ces valeurs dans (1), on aura pour équation

du plan visuel

$$(4) \qquad -\beta x + \alpha y + (\alpha\beta - ab)z = 0.$$

Maintenant, si l'on suppose que le tableau soit un plan vertical parallèle à l'axe des x, son équation sera $y = \mu$, μ étant une constante; remplaçant donc y par cette constante dans l'équation du plan (4), celle de la perspective de la droite donnée sera

$$(5) \qquad z(\alpha\beta - ab) = \beta x - \alpha\mu.$$

Une autre droite dont les équations seraient

$$x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \beta',$$

aurait pareillement pour perspective

$$(6) \qquad z(a'\beta' - \alpha' b') = \beta' x - \alpha'\mu;$$

et si les deux droites données étaient parallèles entre elles, on exprimerait analytiquement cette circonstance, en faisant $a' = a$, $b' = b$ dans les équations (5, 6), lesquelles deviendraient respectivement

$$(5') \qquad z(\alpha\beta - ab) = \beta x - \alpha\mu,$$
$$(6') \qquad z(\alpha\beta' - \alpha' b) = \beta' x - \alpha'\mu;$$

on trouverait alors que les coordonnées des points d'intersection des perspectives de ces deux droites parallèles seraient sur le tableau,

$$x = \frac{\mu a}{b}, \qquad z = \frac{\mu}{b}.$$

Il suit de là que quel que soit le nombre de droites parallèles entre elles, leurs perspectives se couperont en un seul point; c'est ce point d'intersection qu'on nomme *point accidentel* dans les Traités de Perspective linéaire.

Le point de vue sur le plan perspectif est le pied de la perpendiculaire μ abaissée de l'œil sur ce plan, ou, en d'autres termes, est la projection orthogonale de cet œil.

(*Voyez* les *Traités de Géométrie descriptive*, par MM. Lacroix et Hachette.)

Lorsque les droites données sont parallèles et horizontales, on a

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a'} = 0, \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{b'} = 0,$$

et les coordonnées du point accidentel sur le tableau sont

$$x = \frac{0}{0}, \quad z = 0.$$

Mais l'abscisse x ne se présenterait pas sous la forme indéterminée si les coefficiens a, b étaient exprimés en fonction des coordonnées $x'y'z'$, $x''y''z''$ de deux points de l'une des droites, de la première par exemple.

En effet, on aurait dans ce cas

$$a = \frac{x' - x''}{z' - z''}, \quad b = \frac{y' - y''}{z' - z''},$$

et par suite,

$$x = \frac{\mu a}{b} = \mu\left(\frac{x' - x''}{y' - y''}\right), \quad z = 0.$$

Ce résultat nous fait voir que si les droites données étaient toutes perpendiculaires au tableau, ce qui exigerait que $x' = x''$, le point accidentel serait au point de vue ou à l'origine des axes.

Si au contraire les droites horizontales données étaient parallèles au tableau, on aurait $y' = y''$, et les coordonnées du point accidentel seraient

$$x = \mu\left(\frac{x' - x''}{0}\right) = \infty, \quad z = \frac{\mu}{b} = \mu\left(\frac{z' - z''}{y' - y''}\right) = \frac{0}{0};$$

c'est-à-dire que leurs perspectives seraient elles-mêmes parallèles à l'axe des x.

On verra plus loin d'autres propriétés de cette projection perspective.

PROBLÈME.

157. *Mener un plan à travers tant de points donnés qu'on voudra, de manière qu'en abaissant de ces points des perpendiculaires à ce plan, la somme des perpendiculaires situées d'un côté soit égale à la somme de celles qui se trouvent de l'autre côté.*

Soient

$$\left.\begin{matrix}\alpha\ \beta\ \gamma\\ \alpha'\ \beta'\ \gamma'\\ \alpha''\ \beta''\ \gamma''\end{matrix}\right\}\text{ les coordonnées des points }\left\{\begin{matrix}\mathrm{M},\\ \mathrm{M}',\\ \mathrm{M}''.\end{matrix}\right.$$

Le plan sur lequel sont abaissées les perpendiculaires a généralement pour équation

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0,$$

ou pour plus de simplicité,

$$z=ax+by+c;$$

et la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point xyz sur ce même plan, a pour expression

$$\frac{z-ax-by-c}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Il suit de là et de l'énoncé de la proposition, que

$$\gamma-a\alpha-b\beta-c+\gamma'-a\alpha'-b\beta'-c=-\gamma''+a\alpha''+b\beta''+c,$$

en prenant négativement les valeurs des perpendiculaires qui sont situées au-dessous du plan. Si, de cette égalité, on tire la valeur de c, on aura

$$c=\frac{-a(\alpha+\alpha'+\alpha'')-b(\beta+\beta'+\beta'')+\gamma+\gamma'+\gamma''}{3}.$$

Comme on ne peut pas établir d'autre relation entre les coefficiens inconnus a, b, c, il est évident qu'il existe une infinité de plans qui satisfont à la question proposée : or, en substituant la valeur précédente de c dans.....

$z = ax + by + c$, il en résultera

$$z - \frac{\gamma + \gamma' + \gamma''}{3} = a\left(x - \frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{3}\right) + b\left(y - \frac{\beta + \beta' + \beta''}{3}\right);$$

cette équation est visiblement celle d'un plan mené par un point fixe, dont les coordonnées sont

$$\frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{3}, \quad \frac{\beta + \beta' + \beta''}{3}, \quad \frac{\gamma + \gamma' + \gamma''}{3};$$

ou en général,

$$\frac{\alpha + \alpha' + \alpha'' \ldots \alpha^{(n-1)}}{n}, \quad \frac{\beta + \beta' + \beta'' \ldots \beta^{(n-1)}}{n}, \quad \frac{\gamma + \gamma' + \gamma'' \ldots \gamma^{(n-1)}}{n};$$

n désignant le nombre des points donnés.

De là découle cette conséquence remarquable, savoir : que tout plan qui passe par le centre des moyennes distances de plusieurs points placés comme on voudra, à l'égard de trois plans rectangulaires, jouit de la propriété exigée par l'énoncé du problème proposé.

On traiterait aussi facilement la question inverse, c'est-à-dire que l'on pourrait prouver que la somme des perpendiculaires abaissées d'un côté du plan, passant constamment par le centre des moyennes distances, est égale à la somme des perpendiculaires abaissées de l'autre côté; en effet, l'équation générale de ce plan est (n° 122)

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0.$$

Mais, dans cette circonstance,

$$x' = \frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{3}, \quad y' = \frac{\beta + \beta' + \beta''}{3}, \quad z' = \frac{\gamma + \gamma' + \gamma''}{3},$$

et

$$\frac{A}{C} = -a, \quad \frac{B}{C} = -b;$$

ainsi, au moyen de ces valeurs, et en faisant d'ailleurs pour abréger, $\alpha + \alpha' + \alpha'' = [\alpha]$, $\beta + \beta' + \beta'' = [\beta]$, $\gamma + \gamma' + \gamma'' = [\gamma]$, l'équation précédente devient

$$z = ax + by - a\frac{[\alpha]}{3} - b\frac{[\beta]}{3} + \frac{[\gamma]}{3}. \qquad (1)$$

Or, la somme des perpendiculaires abaissées des points M, M′ sur le plan dont il est question, est, d'après ce qui précède, et en faisant pour le moment abstraction du dénominateur $\sqrt{1 + a^2 + b^2}$,

$$\gamma + \gamma' - a(\alpha + \alpha') - b(\beta + \beta') + 2a\frac{[\alpha]}{3} + 2b\frac{[\beta]}{3} - 2\frac{[\gamma]}{3}:$$

ajoutant à cette somme la quantité nulle,

$$a[\alpha] - a[\alpha] + b[\beta] - b[\beta] + [\gamma] - [\gamma],$$

puis réduisant, on aura, à cause de $[\alpha] = \alpha + \alpha' + \alpha''$, etc.,

$$-\gamma'' + a\alpha'' + b\beta'' - a\frac{[\alpha]}{3} - b\frac{[\beta]}{3} + \frac{[\gamma]}{3}.$$

Ce résultat auquel on doit restituer le dénominateur $\sqrt{1 + a^2 + b^2}$, étant l'expression même de la perpendiculaire abaissée du point M″ sur le plan proposé (1), et en sens contraire des deux premières, il s'ensuit que les deux sommes faites séparément des perpendiculaires positives et négatives sont dans le rapport d'égalité; et il est incontestable que cette propriété a toujours lieu, quels que soient le nombre des points donnés et les valeurs de a, b. Nous allons passer à la solution d'un autre problème dont celui-ci est un cas particulier.

PROBLÈME.

158. *Mener un plan dans l'espace, de manière que la somme des perpendiculaires abaissées sur ce plan et de plusieurs points donnés à volonté, soit égale à une droite donnée* m.

Supposons que les perpendiculaires soient d'un même côté du plan cherché et au nombre de trois seulement, pour

abréger le calcul; l'équation de ce plan sera

$$z = ax + by + c;$$

et la perpendiculaire à ce même plan aura généralement pour expression

$$\frac{z - ax - by - c}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Ainsi, relativement aux points donnés $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$, on aura, en se conformant d'ailleurs à l'énoncé de la proposition,

$$(z' - ax' - by' - c) + (z'' - ax'' - by'' - c)$$
$$+ (z''' - ax''' - by''' - c) = m\sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

Substituant, dans l'équation du plan cherché, pour c sa valeur tirée de l'équation précédente, on obtiendra

$$z - \frac{z' + z'' + z'''}{3} = a\left(x - \frac{x' + x'' + x'''}{3} - \frac{m}{3}\frac{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}{a}\right)$$
$$+ b\left(y - \frac{y' + y'' + y'''}{3}\right).$$

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes, et si l'on place leur origine au centre des moyennes distances des trois points donnés, on aura simplement, en désignant par $x_1y_1z_1$ les coordonnées relatives aux nouveaux axes,

$$z_1 = a\left(x_1 - \frac{m}{3}\frac{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}{a}\right) + by_1.$$

Cette équation est évidemment celle d'un plan mené par un point de l'axe des x, distant de la nouvelle origine de la quantité $\frac{m}{3}\frac{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}{a}$. Mais cette quantité désigne précisément l'abscisse du point par lequel passerait un plan à la fois parallèle à un autre plan donné à volonté, et tangent à une sphère ayant pour rayon $\frac{m}{3}$ (n° 150), ou en

général $\frac{m}{n}$, n étant le nombre des points donnés, et m la somme des perpendiculaires. Donc, tous les plans qui satisfont à la proposition sont tangens à une sphère dont le centre est celui des moyennes distances des points donnés, et dont le rayon est égal à la somme des perpendiculaires en question, divisée par le nombre de ces points.

Il est remarquable que cette conséquence se déduirait immédiatement, et sans calcul, du *Principe des momens* démontré en Statique; mais il convient de prouver les propositions de pure Géométrie par le seul secours de l'analyse.

PROBLÈME.

159. *Par un point donné dans un angle trièdre trirectangle, mener un plan de manière que sa partie interceptée dans cet angle forme un triangle semblable à un triangle donné.*

Prenons les arêtes de l'angle trièdre trirectangle pour les axes des coordonnées; représentons par a, b, c les côtés du triangle donné, et par A, B, C les angles respectivement opposés à ces côtés; enfin, désignons par x', y', z' les coordonnées du point donné.

L'équation d'un plan étant en général

$$mX + nY + pZ = q,$$

les segmens x, y, z, qu'il interceptera sur les axes des X, Y, Z, s'obtiendront en faisant successivement Y et $Z = 0$, X et $Z = 0$, X et $Y = 0$, et changeant X en x, Y en y et Z en z; ainsi l'on aura

$$m = \frac{q}{x},\ n = \frac{q}{y},\ p = \frac{q}{z};$$

de là l'équation du plan cherché sera

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 1,$$

et puisque ce plan doit passer par le point donné, on aura

$$\frac{x'}{x} + \frac{y'}{y} + \frac{z'}{z} = 1;$$

ou chassant les dénominateurs, il viendra pour première équation entre les inconnues x, y, z,

$$(1) \qquad x'yz + y'xz + z'xy = xyz.$$

Si l'on fait

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 &= a'^2, \\ x^2 + z^2 &= b'^2, \\ x^2 + y^2 &= c'^2, \end{aligned}$$

les lignes a', b', c' seront les côtés du triangle à construire; mais ce triangle devant être semblable au triangle donné a, b, c, on a nécessairement, en vertu de cette similitude,

$$\left.\begin{aligned} a' &= \lambda a, \text{ et par suite } y^2 + z^2 = \lambda^2 a^2, \\ b' &= \lambda b, \qquad\qquad x^2 + z^2 = \lambda^2 b^2, \\ c' &= \lambda c, \qquad\qquad x^2 + y^2 = \lambda^2 c^2, \end{aligned}\right\} (2)$$

le coefficient λ étant un nombre qu'il s'agit de déterminer. Pour cet effet l'on combinera les équations (1, 2) entre les quatre inconnues x, y, z, λ, et l'on aura au moyen de celles (2) et des relations du n° 3,

$$\begin{aligned} 2x^2 &= \lambda^2 (b^2 + c^2 - a^2) = 2\lambda^2 bc \cos A, \\ 2y^2 &= \lambda^2 (c^2 + a^2 - b^2) = 2\lambda^2 ca \cos B, \\ 2z^2 &= \lambda^2 (a^2 + b^2 - c^2) = 2\lambda^2 ab \cos C, \end{aligned}$$

par suite,

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda \sqrt{bc \cos A}, \\ y &= \lambda \sqrt{ca \cos B}, \\ z &= \lambda \sqrt{ab \cos C}; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ces valeurs étant substituées dans la relation (1) il vient, après les réductions,

$$\lambda = \frac{x'}{\sqrt{bc \cos A}} + \frac{y'}{\sqrt{ca \cos B}} + \frac{z'}{\sqrt{ab \cos C}}.$$

et les valeurs (3) se changeront en celles-ci :

$$x = x' + y'\sqrt{\frac{b\cos A}{a\cos B}} + z'\sqrt{\frac{c\cos A}{a\cos C}},$$

$$y = y' + z'\sqrt{\frac{c\cos B}{b\cos C}} + x'\sqrt{\frac{a\cos B}{b\cos A}},$$

$$z = z' + x'\sqrt{\frac{a\cos C}{c\cos A}} + y'\sqrt{\frac{b\cos C}{c\cos B}}.$$

Le problème proposé se trouve donc résolu. M. Gergonne qui a donné cette solution analytique, fait remarquer que si des sommets du triangle donné l'on abaisse des perpendiculaires sur les côtés opposés considérés comme les diamètres de demi-circonférences, ces perpendiculaires formeront sur chacun des côtés, des segmens adjacens qui seront entre eux comme les carrés des cordes menées des extrémités de ces mêmes côtés aux points où ces perpendiculaires couperont les circonférences; et conséquemment les valeurs ci-dessus de x, y, z prendront une forme rationnelle en substituant aux segmens dont il s'agit les carrés des cordes correspondantes. Par exemple, les deux termes de la fraction $\frac{b\cos A}{a\cos B}$, se composent des deux segmens du côté c : il est donc très facile de faire la transformation indiquée. (*Voyez* d'ailleurs les *Ann. de Mathém.*, tom. X, p. 383.)

THÉORÈME.

160. *Dans tout quadrilatère plan ou gauche la somme des carrés des deux diagonales, plus quatre fois le carré de la ligne qui joint les milieux de ces diagonales, est égale à la somme des carrés des quatre côtés.*

[Fig. 90.] Soient

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{matrix}\right\}$$

les coordonnées des points

$$M \qquad M' \qquad M'' \qquad M'''$$

situées d'une manière quelconque dans l'espace.

Faisons en outre

$$\begin{aligned}
&AM = a, \quad AM' = a', \quad AM'' = a'', \quad AM''' = a''',\\
&MM' = c, \quad MM''' = c', \quad M'M'' = c'', \quad M''M''' = c''',\\
&MM'' = D, \quad M'M''' = D', \quad nn' = \mu.
\end{aligned}$$

Il est visible que les coordonnées des points n, n', milieux des diagonales D, D', sont

$$\text{pour le premier,} \quad \frac{x+x''}{2}, \frac{y+y''}{2}, \frac{z+z''}{2},$$

$$\text{et pour le second,} \quad \frac{x'+x'''}{2}, \frac{y'+y'''}{2}, \frac{z'+z'''}{2}.$$

Cela posé, on a évidemment, par la propriété du triangle rectangle,

$$\begin{aligned}
D^2 &= (x-x'')^2 + (y-y'')^2 + (z-z'')^2,\\
D'^2 &= (x'-x''')^2 + (y'-y''')^2 + (z'-z''')^2,\\
4\mu^2 &= [x+x''-(x'+x''')]^2 + [y+y''-(y'+y''')]^2\\
&\qquad + [z+z''-(z'+z''')]^2.
\end{aligned}$$

Développant les puissances indiquées et n'écrivant, pour abréger, que les premiers termes des quantités qui sont de la forme $2(xx'+yy'+zz')$, on obtiendra, à cause de $x^2+y^2+z^2=a^2$, etc.,

$$\begin{aligned}
D^2 &= a^2 + a''^2 - 2(xx''\ldots),\\
D'^2 &= a'^2 + a'''^2 - 2(x'x'''\ldots),\\
4\mu^2 &= a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2\\
&\quad - 2(xx'\ldots) - 2(xx'''\ldots) - 2(x'x''\ldots)\\
&\quad - 2(x''x'''\ldots) + 2(xx''\ldots) + 2(x'x'''\ldots);
\end{aligned}$$

additionnant ces équations, il viendra, après avoir effacé les termes qui se détruisent,

$$D^2+D'^2+4\mu^2=[a^2+a'^2-2(x\,x'..)]+[a^2+a'''^2-2(x\,x'''..)],$$
$$+[a'^2+a''^2-2(x'x''..)]+[a''^2+a'''^2-2(x''x'''..)].$$

Mais les premier, deuxième, troisième et quatrième termes du second membre de celle-ci, sont respectivement les carrés des quatre côtés $c\ c'\ c''\ c'''$; donc

$$D^2+D'^2+4\mu^2=c^2+c'^2+c''^2+c'''^2;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Lorsque $\mu=0$, les deux diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales, et le quadrilatère se change en rhombe; alors on a simplement

$$D^2+D'^2=2c^2+2c'^2,$$

comme on le savait déjà.

Cette proposition élégante dont Euler avait seulement reconnu l'existence pour le quadrilatère plan (tome V des *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*), et que Carnot a généralisée dans sa Géométrie de position, peut être démontrée plus rapidement à l'aide du théorème du n° 58, et cela doit être, parce qu'alors on part d'une relation immédiate entre les lignes que l'on considère dans le quadrilatère.

THÉORÈME

Concernant l'hexaèdre irrégulier.

161. [Fig. 91.] Soit l'hexaèdre irrégulier Ac pour lequel nous ferons

$$Aa=a,\ Cc=b,\ ab=e,\ cd=f,$$
$$bc=g,\ ad=h,\ ac=m,\ bd=m',$$

$$Bb=A,\ Dd=B,\ AB=E,\ CD=F,\ aC=d,\ Ac=d';$$
$$BC=G,\ AD=H,\ AC=M,\ BD=M',\ bD=D,\ Bd=D'.$$

La ligne qui joint les milieux des diagonales

$$DD'=P,\ MM'=Q,$$
$$dd'=p,\ mm'=q.$$

Cela posé, les quadrilatères *abcd*, ABCD donneront, par ce qui précède,

$$m^2 + m'^2 = e^2 + f^2 + g^2 + h^2 - 4q^2,$$
$$M^2 + M'^2 = E^2 + F^2 + G^2 + H^2 - 4Q^2.$$

Les quadrilatères ACc*a*, BD*db* fourniront de même

$$a^2 + b^2 + m^2 + M^2 = d^2 + d'^2 + 4p^2,$$
$$A^2 + B^2 + m'^2 + M'^2 = D^2 + D'^2 + 4P^2;$$

ajoutant ces dernières équations, et substituant pour $m^2 + m'^2$ et $M^2 + M'^2$ leurs valeurs, on aura

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2+e^2+f^2+g^2+h^2 \\ +A^2+B^2+E^2+F^2+G^2+H^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} d^2+d'^2+D^2+D'^2 \\ +4p^2+4q^2+4P^2+4Q^2; \end{array}\right.$$

formule qui, étant traduite en langage ordinaire, serait l'énoncé d'un beau théorème relatif aux hexaèdres dont les arêtes forment des quadrilatères quelconques.

On conçoit que quand toutes les faces d'un hexaèdre sont des parallélogrammes, les lignes P, p, Q, q sont nulles; pour lors, l'équation précédente se réduit à

$$4A^2 + 4E^2 + 4G^2 = D^2 + D'^2 + d^2 + d'^2;$$

c'est-à-dire que *dans tout parallélépipède, la somme des carrés des quatre diagonales est égale à la somme des carrés des douze arêtes.*

PROBLÈME.

162. *Par deux points donnés dans l'espace, mener deux droites qui fassent entre elles un angle donné.*

Soient en général $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ les coordonnées rectangulaires des points donnés M, M'; et x, y, z, celles du sommet D de l'angle donné.

Les équations des droites DM, DM' sont respectivement

$$\left.\begin{array}{l} \alpha - x = a\,(\gamma - z), \\ \beta - y = b\,(\gamma - z), \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha' - x = a'\,(\gamma' - z), \\ \beta' - y = b'\,(\gamma' - z); \end{array}\right.$$

or, si V désigne l'angle de ces deux droites, on aura n° 120,

$$\text{tang V} = \frac{\sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (ab'-a'b)^2}}{1 + aa' + bb'}. \quad (1)$$

Substituant donc pour a, a', b, b' leurs valeurs fournies par les équations précédentes, on obtiendra une équation en xyz qui sera celle de la surface sur laquelle sont situés tous les points D qui résolvent la question; mais comme cette question conserve évidemment toute sa généralité, quelle que soit la position des points M, M', à l'égard des plans coordonnés, supposons que le point M soit l'origine, et que le point M' soit sur l'axe des x; alors les équations des droites DM, DM' se réduiront à

$$x = az, \qquad x - \alpha' = a'z,$$
$$y = bz, \qquad y = b'z;$$

et la valeur de tangente V sera simplement, toutes réductions faites,

$$\text{tang V} = \frac{\alpha' \sqrt{y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2 - \alpha' x};$$

partant,

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \alpha' x)^2 = \frac{\alpha'^2}{\text{tang}^2 \text{V}} (y^2 + z^2). \quad (2)$$

Quoique cette formule soit encore assez compliquée, cela n'empêche pas que l'on ne reconnaisse aisément qu'elle donne lieu à une surface de révolution engendrée par un arc de cercle capable de l'angle V, et tournant autour de sa corde $MM' = \alpha'$. En effet, si l'on fait passer un plan par cette droite et par le point D, et qu'on désigne par u une ordonnée prise dans ce plan, perpendiculairement à x, on aura, à cause de $u^2 = y^2 + z^2$,

$$(x^2 + u^2 - \alpha' x)^2 = \frac{\alpha'^2}{\text{tang}^2 \text{V}} u^2;$$

ou extrayant la racine carrée de part et d'autre,

$$x^2 + u^2 - \alpha' x = \pm \frac{\alpha' u}{\text{tang V}}. \qquad (3)$$

Cette équation entre x et u est celle du cercle (n° 94), et reste la même, quelle que soit la position du plan MDM′; le sommet de l'angle constant des deux droites DM, DM′ est donc sur la surface du solide de révolution dont il vient d'être parlé.

On voit par là le moyen de résoudre la question suivante : *Déterminer la position d'un point situé hors d'un plan, en supposant que l'on connaisse les angles que font entre elles les droites menées de ce point à trois autres points donnés sur ce plan.* (*Voyez*, pour la solution graphique de ce problème, la *Géométrie descriptive* de Monge, ou celle de M. Lacroix.) En y appliquant l'analyse, on aurait, comme je l'ai fait voir dans la première édition de mon *Traité de Géodésie*, à résoudre en définitive une équation du huitième degré; mais en opérant de la sorte, la solution du problème perdrait nécessairement toute son élégance et toute sa simplicité.

Si les points D, M′, M″ étaient donnés sur la sphère, et que l'angle M′DM″ fût celui des deux arcs de grand cercle DM′, DM″, la question se résoudrait d'une manière analogue à la précédente.

Dans cette hypothèse, soient

$$xyz, \quad x'y'z', \quad x''y''z''$$

les coordonnées rectangles des points

$$\text{D}, \quad \text{M}', \quad \text{M}'',$$

et plaçons l'origine au centre de la sphère dont nous ferons le rayon égal à l'unité. Cela posé, les équations des plans des deux arcs DM′, DM″ seront

$$\text{A}x + \text{B}y + \text{C}z = 0,$$
$$\text{A}'x + \text{B}'y + \text{C}'z = 0,$$

et l'angle φ de ces plans sera donné par la formule

$$(4) \qquad \cos\varphi = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Or, d'après le n° 122,

$$\begin{aligned} A &= yz' - zy', & A' &= yz'' - zy'', \\ B &= zx' - xz', & B' &= zx'' - xz'', \\ C &= xy' - yx', & C' &= xy'' - yx''. \end{aligned}$$

Substituant donc ces valeurs dans (4), puis développant et réduisant en vertu des relations $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, etc., $\cos k = x'x'' + y'y'' + z'z'' = \cos M'M''$, démontrées au n° 120, il viendra

$$[1 - (xx' + yy' + zz')^2]\,[1 - (xx'' + yy'' + zz'')^2]\cos^2\varphi$$
$$= \left[\begin{array}{l} \cos k - x^2x'x'' - y^2y'y'' - z^2z'z'' \\ \qquad - xy(x'y'' + y'x'') \\ \qquad - xz(x'z'' + z'x'') \\ \qquad - yz(y'z'' + z'y''), \end{array}\right]^2$$

équation appartenant évidemment à une surface du 4e degré en xyz, et dont l'intersection avec la surface de la sphère produirait une courbe qui serait le lieu de tous les points D qui satisfont à la question.

Mais le problème serait tout-à-fait déterminé, si les arcs $DM' = k'$, $DM'' = k''$ étaient connus. En effet, il résulte du n° 120 que

$$\begin{aligned} xx' + yy' + zz' &= \cos k', \\ xx'' + yy'' + zz'' &= \cos k''. \end{aligned}$$

Pour avoir une 3e équation du premier degré en xyz, désignons par $\frac{S}{6}$ le volume de la pyramide appuyée sur le triangle sphérique $DM'M''$, dont les côtés sont k, k', k'', et qui a son sommet à l'origine des axes; nous aurons (n° 122), en changeant D en S,

$$(y'z''-z'y'')x+(z'x''-x'z'')y+(x'y''-y'x'')z=S.$$

Telles sont les trois équations à combiner entre elles pour avoir les coordonnées x, y, z, dont les valeurs seront assez simples, en faisant attention aux relations précédentes, et à ce que le dénominateur commun de ces valeurs se réduit à

$$1-(x'x''+y'y''+z'z'')^2=\sin^2 k.$$

Nous engageons le lecteur à effectuer ce calcul et à assigner lui-même le cas dans lequel la valeur de S doit être prise positivement ou négativement. Au reste, on a (n° 173)

$$S=\pm 2\sqrt{\left[\sin\left(\frac{k+k'+k''}{2}\right)\sin\left(\frac{k'+k''-k}{2}\right)\sin\left(\frac{k+k''-k'}{2}\right)\sin\left(\frac{k+k'-k''}{2}\right)\right]}.$$

Comme rien n'empêche, en Géographie, de prendre l'équateur terrestre pour le plan des $x\,y$, et le premier méridien pour celui des xz, on a (n° 137), en désignant par λ et p la latitude et la longitude du point D,

$$x=\cos p\cos\lambda,\quad y=\sin p\cos\lambda,\quad z=\sin\lambda,$$

et par suite,

$$\operatorname{tang} p=\frac{y}{x},\quad z=\sin\lambda.$$

Ce dernier problème est une généralisation de celui du n° 65. Quoique sa solution soit peu compliquée, elle l'est cependant encore trop pour être employée de préférence à celle dont on fait usage, en pareille circonstance, dans les opérations géodésiques, où il est d'ailleurs important d'avoir égard à la non-sphéricité du globe terrestre. (*Géodésie*, tom. I, p. 296.)

Si, en Astronomie, l'on se proposait de déterminer la position d'un astre au moyen de ses distances à deux étoiles connues, l'on pourrait y parvenir à l'aide de l'analyse précédente. (*Voyez* la *Correspondance astron. et géograph.* de M. de Zach, vol. IX, page 385.)

PROBLÈME.

163. *Étant donnés tant de points qu'on voudra dans l'espace, en trouver un autre tel, que menant par ce point une droite à chacun des autres, la somme des carrés de ces lignes soit égale à un carré donné.*

Supposons, pour abréger les calculs, qu'il n'y ait que trois points donnés, ce qui n'ôte rien de la généralité de la solution du présent problème et appelons

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}\alpha''\\ \beta''\\ \gamma''\end{matrix}\right\}$$

les coordonnées des points

$$A \qquad A' \qquad A''.$$

Soient en outre x, y, z celles du point M cherché.

On aura, en vertu du n° 129,

$$\left.\begin{aligned}\overline{AM}^2 &= (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,\\ \overline{A'M}^2 &= (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2,\\ \overline{A''M}^2 &= (x-\alpha'')^2 + (y-\beta'')^2 + (z-\gamma'')^2.\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

Si l'on égale à q^2 la somme des seconds membres de ces équations développées, on aura, après avoir divisé tout par 3,

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2\\ &-\tfrac{2}{3}(\alpha+\alpha'+\alpha'')x-\tfrac{2}{3}(\beta+\beta'+\beta'')y-\tfrac{2}{3}(\gamma+\gamma'+\gamma'')z\\ &=q^2-\frac{(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\beta^2+\beta'^2+\beta''^2+\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2)}{3}.\end{aligned}$$

Il suit de cette équation, que tous les points qui satisfont au problème sont situés sur la surface d'une sphère dont le centre est précisément celui des forces parallèles supposées toutes égales entre elles et appliquées aux points donnés A, A′, A″.... , ou, ce qui est de même, celui

des *moyennes distances* de ces mêmes points aux trois plans coordonnés.

En effet, le moyen de transporter l'origine au centre de la sphère, est de mettre dans l'équation précédente,

$$x' + \frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{3}, \quad y' + \frac{\beta + \beta' + \beta''}{3}, \quad z' + \frac{\gamma + \gamma' + \gamma''}{3};$$

au lieu de x, y, z; et comme la résultante est de la forme

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2,$$

il s'ensuit que les coordonnées du centre de la sphère à décrire sont, en général,

$$\frac{\alpha + \alpha' + \alpha''\ldots}{n}, \quad \frac{\beta + \beta' + \beta''\ldots}{n}, \quad \frac{\gamma + \gamma' + \gamma''\ldots}{n};$$

n étant le nombre des points donnés; ce centre est donc celui des moyennes distances de ces points aux trois plans coordonnés.

Il est à propos de remarquer que la somme des seconds membres des équations (A) est susceptible d'être exprimée en fonction des moyennes distances, et c'est à quoi nous allons parvenir, sans recourir à aucun principe de Géométrie.

Supposons que l'on ait n binomes de la forme

$$(x - \alpha)^2, \quad (x - \alpha')^2, \quad (x - \alpha'')^2 \ldots \quad (x - \alpha^{(n-1)})^2.$$

En les développant et en les ajoutant, leur somme sera

$$nx^2 - 2(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots \alpha^{(n-1)})x$$
$$+ (\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots \alpha^{(n-1)2}) = S. \quad (1)$$

Soit, pour simplifier,

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' \ldots = [\alpha], \quad \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \ldots = [\alpha^2],$$

on aura

$$nx^2 - 2[\alpha]x + [\alpha^2] = S,$$

et l'on peut donner à cette expression la forme

$$nx^2 + \frac{n}{n^2}[\alpha^2] + \frac{n(n-1)}{n^2}[\alpha^2] - \frac{2nx}{n}[\alpha] = S; \qquad (2)$$

or, il est facile de voir que

$$nx^2 + \frac{n}{n^2}[\alpha^2] + \frac{2nx}{n}[\alpha]$$

$$= n\left(x - \frac{[\alpha]}{n}\right)^2 + \frac{2n}{n^2}(\alpha\alpha' + \alpha\alpha'' \ldots\ldots);$$

et si l'on fait encore pour simplifier,

$$\alpha\alpha' + \alpha\alpha'' \ldots\ldots \alpha'\alpha'' \ldots\ldots = [\alpha\alpha'],$$

l'équation (2) deviendra

$$n\left(x - \frac{[\alpha]}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)}{n^2}[\alpha^2] - \frac{2n}{n^2}[\alpha\alpha'] = S. \qquad (3)$$

D'un autre côté, les second et troisième termes du premier membre de cette équation peuvent être écrits ainsi :

$$[\alpha^2] + \frac{n}{n^2}[\alpha^2] - \frac{2n}{n^2}[\alpha^2] + \frac{2n}{n^2}[\alpha\alpha'] - \frac{4n}{n^2}[\alpha\alpha']$$

$$= [\alpha^2] + \frac{n}{n^2}[\alpha^2] + \frac{2n}{n^2}[\alpha\alpha'] - \frac{2n}{n^2}[\alpha]^2;$$

et en examinant avec attention le second membre de cette équation identique, on reconnaît qu'il dérive du développement de

$$\left(\alpha - \frac{[\alpha]}{n}\right)^2 + \left(\alpha' - \frac{[\alpha]}{n}\right)^2 + \left(\alpha'' - \frac{[\alpha]}{n}\right)^2 + \ldots$$

Il suit de là que l'équation (3) ou (1) prend la forme

$$n\left(x - \frac{[\alpha]}{n}\right)^2 + \left(\alpha - \frac{[\alpha]}{n}\right)^2$$

$$+ \left(\alpha' - \frac{[\alpha]}{n}\right)^2 + \left(\alpha'' - \frac{[\alpha]}{n}\right)^2 + \ldots = S.$$

Donc, si l'on ajoute ensemble les équations (A), l'on aura

cette relation remarquable :

$$\left.\begin{aligned}&\left(\alpha-\frac{[\alpha]}{3}\right)^2+\left(\beta-\frac{[\beta]}{3}\right)^2+\left(\gamma-\frac{[\gamma]}{3}\right)^2\\+&\left(\alpha'-\frac{[\alpha]}{3}\right)^2+\left(\beta'-\frac{[\beta]}{3}\right)^2+\left(\gamma'-\frac{[\gamma]}{3}\right)^2\\+&\left(\alpha''-\frac{[\alpha]}{3}\right)^2+\left(\beta''-\frac{[\beta]}{3}\right)^2+\left(\gamma''-\frac{[\gamma]}{3}\right)^2\\+&\,3\left(x-\frac{[\alpha]}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{[\beta]}{3}\right)^2+3\left(z-\frac{[\gamma]}{3}\right)^2\end{aligned}\right\}=q^2.$$

Donc, *dans tout polygone rectiligne plan ou gauche, la somme des carrés des distances de tous les angles à un point quelconque pris dans l'espace, est égale à la somme des carrés des distances de ces mêmes angles au centre des moyennes distances, plus au carré de la distance de ce centre au premier point pris dans l'espace, multiplié par le nombre des angles du polygone.*

Au-delà de trois dimensions, la relation précédente ne signifie plus rien en Géométrie, mais étant appliquée aux nombres, elle en exprime, comme on voit, une assez belle propriété.

Si l'on demandait, maintenant, que la somme q^2 fût un *minimum*, on verrait que le point cherché xyz serait le centre même des moyennes distances de tous les points donnés : en effet, puisque dans l'équation précédente les termes de la quatrième ligne sont les seuls qui varient, et que la somme de ces termes est essentiellement positive, il faut, pour que cette somme devienne nulle, que l'on ait séparément

$$x-\frac{[\alpha]}{3}=0,\quad y-\frac{[\beta]}{3}=0,\quad z-\frac{[\gamma]}{3}=0.$$

C'est aussi à quoi l'on serait conduit en égalant à zéro la différentielle de la valeur de q^2 (*Calcul différentiel* de M. Lacroix) ; différentielle qui doit être prise successi-

vement par rapport à x, y, z, vu l'indépendance de ces variables.

THÉORÈME.

164. *Si les centres ou sommets d'une suite de surfaces coniques enveloppant une surface du second ordre, sont tous sur un même plan situé d'une manière quelconque dans l'espace, les plans des lignes de contact de ces surfaces coniques avec la surface donnée passeront tous par un même point.*

L'équation d'une surface du second ordre, rapportée à des axes obliques, étant

$$A'z^2 + B'y^2 + C'x^2 + 2D'x = 0, \qquad (1)$$

celle du plan tangent rapportée aux mêmes axes, et assujettie à passer par un point ayant pour coordonnées α, β, γ, est (n° 148)

$$(C'\alpha + D')x + B'\beta y + A'\gamma z + D'\alpha = 0. \qquad (2)$$

Cette équation (2) est aussi essentiellement celle du plan de la courbe de contact de la surface (1) et de la surface conique enveloppante, dont les coordonnées du sommet ou du centre sont α, β, γ; et comme l'abscisse du point où ce plan coupe l'axe des x est

$$x = -\frac{D'\alpha}{C'\alpha + D'},$$

on voit que cette abscisse ne dépend que de la coordonnée α : sa valeur sera donc la même quand on ne fera varier que les deux autres coordonnées β, γ. Or, rien ne s'opposant à ce que l'on prenne l'un des plans coordonnés parallèle au plan sur lequel sont situés les sommets des surfaces coniques, il est évident que ce plan contiendra les coordonnées β, γ, et que tous ceux des courbes de contact dont il s'agit se couperont en un même point de l'axe des x; ce qui prouve la proposition énoncée.

Recherche des équations des courbes qui résultent des sections du cône par un plan.

165. Lorsque l'on eut découvert, par la Géométrie, les principales propriétés des différentes courbes que l'on obtient en coupant un cône à base circulaire par un plan, et que l'on eut inventé l'Algèbre, on chercha à vérifier ces propriétés par le calcul algébrique, en considérant simplement ces courbes en elles-mêmes; c'est-à-dire qu'on les regarda comme des lignes tracées sur un plan suivant une certaine loi, ou comme des cas particuliers de l'équation la plus générale du second degré entre deux variables. Pour démontrer synthétiquement l'identité de ces courbes avec les sections coniques, on suppose, dans tous les livres élémentaires, que le plan coupant est toujours perpendiculaire au point mené par l'axe (n° 151. L. C.); mais cette méthode, qui n'est point générale, laisse par conséquent quelque chose à désirer. En voici une autre entièrement analytique, qui remplit mieux le but, et me paraît plus simple que toutes celles qui, à ma connaissance, ont été employées jusqu'à présent pour cet objet.

[Fig. 92.] L'équation de la surface du cône oblique, est, par le n° 144,

$$(a^2+b^2-r^2)z^2+c^2(x^2+y^2)-2acxz-2bcyz=0\,; \qquad \text{(C)}$$

son sommet étant placé à l'origine des coordonnées rectangulaires, sa base étant parallèle au plan des xy, le centre O de cette base ayant pour coordonnées a, b, c, et son rayon BO étant désigné par r.

Le moyen qui semble le plus commode pour discuter la courbe d'intersection cherchée, est, comme au n° 134, de placer l'origine et la direction des axes, de manière que deux des nouvelles coordonnées relatives à la surface du cône soient précisément dans le plan coupant; car, on conçoit que pour toute la partie commune à ce plan et à la

surface conique, la troisième coordonnée est nulle. Nous pourrions donc employer, à cet effet, les formules

$$\begin{aligned} x &= \alpha + x' \cos\varphi + y' \sin\varphi \cos\theta, \\ y &= \beta + x' \sin\varphi - y' \cos\varphi \cos\theta, \\ z &= \gamma + y' \sin\theta, \end{aligned}$$

φ étant l'angle que la trace horizontale X'K du plan coupant Y'KX' fait avec l'axe des x, et θ l'angle que ce même plan forme avec celui des xy. Mais pour simplifier les calculs, sans altérer en rien leur généralité, nous ferons, dans ces formules, $\sin\varphi = 1$ et $\beta = 0$, c'est-à-dire que nous placerons la nouvelle origine N dans le plan xz; alors on aura

$$Ap = \alpha, \quad pN = \gamma, \quad \text{angle } Y'KX = \theta,$$

et, partant,

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + \cos\theta . y', \\ y &= x', \\ z &= \gamma + \sin\theta . y'; \end{aligned}\right\} \text{ ou simplement } \left\{\begin{aligned} x &= \alpha + my', \\ y &= x', \\ z &= \gamma + ny'. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, si l'on élimine de l'équation (C) les variables x, y, z à l'aide de ces valeurs, on obtiendra, en faisant $a^2 + b^2 - r^2 = p$,

$$\left.\begin{aligned} &(pn^2 + c^2m^2 - 2acmn)y'^2 - 2bcnx'y' + c^2x'^2 \\ &+ 2(p\gamma n + \alpha c^2 m - \alpha cn - ac\gamma m)y' - 2bc\gamma x' \\ &+ p\gamma^2 + \alpha^2 c^2 - 2\alpha c\gamma = 0. \end{aligned}\right\} \quad (D)$$

Cette équation, qui est celle de la courbe d'intersection du plan $x'y'$ et de la surface conique, donne nécessairement naissance à l'une des trois courbes du second ordre, puisqu'elle est de la forme

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Ex' + F = 0. \quad (D')$$

Il ne s'agit donc plus que d'assigner la position du plan sécant, pour qu'il en résulte telle ou telle courbe.

Si l'on suppose d'abord $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, ce plan passera

par l'origine, et l'on aura simplement

$$\left.\begin{array}{l}(pn^2+c^2m^2-2acmn)y'^2-2bcnx'y'+c^2x'^2=0,\\ \text{ou}\qquad\qquad Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2=0.\end{array}\right\}\quad(E)$$

Cette nouvelle formule appartient en général au système de deux droites; car, en la résolvant par rapport à y', on obtient

$$y'=\left[\frac{-B\pm\sqrt{\{B^2-4AC\}}}{2A}\right]x';$$

d'où il suit que tant que la quantité B^2-4AC n'est pas nulle ou négative, la section entière du plan $x'y'$ passant par le sommet du cône forme un triangle; mais lorsque $B^2-4AC=0$, les deux droites fournies par l'équation précédente se confondant, le plan coupant est évidemment tangent à la surface conique. Cette circonstance a donc lieu quand le premier membre de l'équation (E) est un carré.

Si, en supposant seulement $\gamma=0$, on cherchait ce que devient la section du plan $x'y'$ dans le cas où $n=0$, l'équation (D) se réduirait à

$$(y'+\alpha)^2+x'^2=0;$$

et, comme alors la valeur de y' ne peut être réelle qu'autant que $x'=0$, auquel cas $y'=-\alpha$, il en résulte que la section se réduit à un point; ce qui est d'ailleurs évident.

Pour une section parabolique, l'équation (D) fournit entre les coefficiens de ses trois premiers termes, la relation

$$B^2-4AC=0, \text{ ou } b^2n^2-pn^2-c^2m^2+2\,acmn=0,$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante, en remplaçant p par sa valeur,

$$(an-cm)^2=r^2n^2,$$

et d'où l'on tire

$$\frac{n}{m} = \text{tang}\,\theta = \frac{c}{a \mp r}.$$

Ce résultat nous apprend que pour que la section soit une parabole, le plan coupant qui passe ailleurs que par la primitive origine A [fig. 93], doit être parallèle à la ligne génératrice du cône. En effet, si l'on forme le prisme triangulaire GAH, EFB, la tangente de l'angle FBE sera $\frac{EF}{EB} = \frac{c}{a - r} = \text{tang}\,\theta$: donc le plan coupant qui a sa trace horizontale perpendiculaire à BDF, et qui fait un angle θ avec le plan xy, est nécessairement parallèle au plan BAF, et par conséquent à la génératrice AB. Pour le cas de $\text{tang}\,\theta = \frac{c}{a + r}$, il est clair que le plan coupant est parallèle à AD; mais alors la section parabolique a lieu dans le cône inférieur à ABD, formé par la même génératrice AB.

Si l'on résout l'équation (D′), et que l'on ait égard à la relation $B^2 - 4AC = 0$, on aura donc pour la parabole

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{\{2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF\}}.$$

On voit bien aussi que (D) est à l'ellipse ou à l'hyperbole selon que $\text{tang}\,\theta > \frac{c}{a \mp r}$, ou $\text{tang}\,\theta < \frac{c}{a \mp r}$, puisque dans le premier cas, $B^2 - 4AC < 0$, et que, dans le second cas, $B^2 - 4AC > 0$: or, pour l'un et l'autre, on a

$$y = -\frac{Bx + D}{2A}$$

$$\pm \frac{1}{2A}\sqrt{\{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF\}};$$

et le plan sécant, qui engendre l'hyperbole, coupe à la fois les deux cônes opposés. Cette courbe a des asymptotes données par

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\left\{x\sqrt{B^2 - 4AC} + \frac{BD - 2AE}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right\}.$$

Enfin, l'équation (D) est celle du cercle, si les deux équations de condition

$$pn^2 + c^2m^2 - 2acmn = c^3,$$
$$bcn = 0,$$

ont lieu à la fois, ou, ce qui est de même, si

$$\frac{n}{m}\left\{(p - c^2)\frac{n}{m} - 2ac\right\} = 0,$$

$$bc\frac{n}{m} = 0.$$

La première a deux racines, dont l'une, $\frac{n}{m} = \tang\theta = 0$, satisfait à la seconde équation; mais celle-ci, qui n'est que du premier degré, ne peut être vérifiée par la seconde racine, $\tang\theta = \frac{2ac}{p - c^2}$; il faut donc, pour ce cas, que l'on ait en outre $b = 0$. De cette analyse il résulte que le plan coupant donne une section circulaire dans deux positions différentes; d'abord lorsque ce plan est parallèle à la base du cône; ensuite lorsque, formant avec cette base un angle dont la tangente $= \frac{2ac}{a^2 - r^2 - c^2}$, il est en même temps perpendiculaire à la section formée dans le cône par un autre plan perpendiculaire à la base de ce corps et passant par son axe.

La situation du plan coupant, à l'égard des génératrices AB, AD [fig. 94], est facile à reconnaître, lorsque $\tang\theta = \frac{2ac}{a^2 - r^2 - c^2}$; car si l'on imagine dans le cône la section triangulaire ABD, dont on vient de parler, la droite BD sera le diamètre de la base conique, et la droite AG la hauteur de ce cône : on aura alors $OB = \frac{BD}{2} = r$, $OG = a$, $AG = c$, $BG = a - r$; et soit l'angle $DBA = B$, l'angle $BDA = D$, on aura, par la formule trigonométrique connue,

$$\tang(B - D) = \frac{\tang B - \tang D}{1 + \tang B \tang D}.$$

Or, pour le cas de la figure, $\tang B = -\frac{c}{a - r}$, et $\tang D = \frac{c}{a + r}$; il suit de là que

$$\tang(B - D) = \frac{-2ac}{a^2 - r^2 - c^2};$$

mais cette valeur est précisément celle de tangente θ prise avec un signe contraire; donc $\tang \theta = -\tang(B - D)$. Donc, si l'on fait l'angle $ABR = D$, on aura

$$\tang R'BD = -\tang(B - D).$$

Ainsi, en menant par la droite RR', ou par toute autre qui lui soit parallèle, un plan perpendiculaire à BAD, il engendrera une section circulaire sur la surface conique; section qu'on nomme *anti-parallèle* ou *sous-contraire*, eu égard à celle qui aurait lieu parallèlement à la base du cône. On voit bien que l'une et l'autre section se confondent lorsque $a = 0$, c'est-à-dire quand le cône est droit.

Euler, dans l'*Appendix de superficiebus* qui termine le second volume de son *Introd. in analys. infinit.*, a traité aussi cette même question d'une manière très générale (*): il y considère le cône à base elliptique dont nous avons donné l'équation au n° 144; mais nous avons jugé utile d'envisager la chose sous un point de vue un peu différent. Néanmoins, le lecteur fera bien de s'exercer sur le même sujet, sans s'astreindre à suivre en tout point notre procédé analytique: il pourra, par exemple, comme l'a fait M. Gergonne (*Ann. de Math.*, tome XII, page 113), chercher l'équation la plus générale de la surface convexe d'un cône à base circulaire, et discuter la courbe produite par la trace de cette surface sur l'un des plans coordonnés.

(*) *Voyez* la traduction française de cet ouvrage, par Labey.

THÉORÈME.

166. *Si deux plans rectangulaires sont assujettis à se mouvoir entre deux droites fixes, leur commune section engendrera un cône qui aura même sommet que celui de l'angle des deux droites fixes, et dont la base sera un cercle perpendiculaire à l'une ou à l'autre de ces droites.*

[Fig. 95.] Soient AM, AM′ les deux droites fixes données, ou les traces horizontales des deux plans rectangulaires passant par l'origine des coordonnées. Les équations de ces plans sont.

$$Ax + By + Cz = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z = 0,$$

lesquelles ont lieu en même temps à la ligne d'intersection; et la condition de perpendicularité est exprimée par

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

De là on tire

$$(AA' + BB')z^2 + BB'y^2 + AA'x^2 + (AB' + A'B)xy = 0. \quad (1)$$

Telle est l'équation de la surface conique engendrée par la commune section des deux plans rectangulaires. Lorsque $z = 0$, on a seulement

$$(By + Ax)(B'y + A'x) = 0,$$

c'est-à-dire que le plan des xy coupe le cône suivant les deux droites AM, AM′, dont les équations respectives sont

$$Ax + By = 0, \quad A'x + B'y = 0.$$

Tout plan parallèle à celui des xy coupe le cône suivant une hyperbole, puisque $(AB' - A'B)^2 > 0$; d'où il suit que le cône est placé obliquement à l'égard de ce plan.

Pour déterminer la position de la base circulaire de ce cône, il faut substituer dans l'équation (1) les valeurs

$$\begin{aligned} x &= a + x' \cos\varphi + y' \cos\theta \sin\varphi, \\ y &= \quad\;\; x' \sin\varphi - y' \cos\theta \cos\varphi, \\ z &= \quad\;\; y' \sin\theta, \end{aligned}$$

obtenues au n° 134. Mais, pour plus de simplicité, soit

$$\begin{aligned} x &= a + mx' + pny', \\ y &= \quad\;\; nx' - pmy', \\ z &= \quad\;\; qy', \end{aligned}$$

et l'on aura

$$\begin{aligned} &\left\{\begin{array}{c} (AA' + BB')q^2 + BB'p^2m^2 \\ + AA'p^2n^2 - (AB' + A'B)\,p^2nm \end{array}\right\} y'^2 \\ + &\left\{ BB'n^2 + AA'm^2 + (AB' + A'B)nm \right\} x'^2 \\ + &\left\{\begin{array}{c} 2AA'nmp - 2BB'nmp \\ + (AB' + A'B)\,(n^2p - m^2p) \end{array}\right\} x'y' \\ &+ Mx' + Ny' + P = 0. \end{aligned}$$

La section par le nouveau plan $x'y'$, sera un cercle, si les coefficiens de x'^2 et y'^2 sont égaux, et si celui de $x'y'$ est $= 0$; or, ce dernier devenant nul par la supposition de $\theta = 100^{gr}$, la première relation se réduit à

$$(Bm - An)\,(B'm - A'n) = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{n}{m} = \text{tang}\,\varphi = \frac{B}{A}, \quad \text{ou} \quad \frac{n}{m} = \text{tang}\,\varphi = \frac{B'}{A'};$$

mais les droites AM et AM′ font avec AX des angles dont les tangentes sont respectivement

$$-\frac{A}{B}, \quad -\frac{A'}{B'};$$

donc la base circulaire du cône est perpendiculaire à l'une ou à l'autre de ces droites.

Ce théorème, qui est dû à M. Hachette, se trouve démontré géométriquement dans le n° 6 de la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, pag. 179.

PROBLÈME.

167. *D'un point donné sur un plan incliné, mener dans ce plan une droite qui fasse avec l'horizon un angle donné.*

L'équation du plan est

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

celles de la droite assujettie à passer par le point donné x', y', z', sont

$$x - x' = a(z - z'), \qquad (1)$$
$$y - y' = b(z - z'). \qquad (2)$$

Or, ces trois équations doivent avoir lieu en même temps, pour que la droite et le plan coïncident; et comme l'angle que cette droite fait avec le plan horizontal est connu, si on le désigne par V, on aura (n° 120)

$$\sin V = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}; \qquad (3)$$

de plus, la condition nécessaire pour que cette droite soit parallèle au plan, est (n° 126)

$$Aa + Bb + C = 0. \qquad (4)$$

Si donc l'on tirait de ces dernières équations les valeurs de a et b, et qu'on les substituât dans les équations (1) et (2), on aurait celles de la droite cherchée, exprimées en fonction de l'angle donné; mais il est plus élégant d'effectuer le calcul suivant:

L'équation (3) donne

$$1 + a^2 + b^2 = \frac{1}{\sin^2 V},$$

et devient, en y mettant pour a et b leurs valeurs tirées des équations (1) et (2),

$$1+\left(\frac{x-x'}{z-z'}\right)^2+\left(\frac{y-y'}{z-z'}\right)^2=\frac{1}{\sin^2 V}.$$

Les mêmes substitutions étant faites dans l'équation (4), on a

$$A\left(\frac{x-x'}{z-z'}\right)+B\left(\frac{y-y'}{z-z'}\right)+C=0;$$

ou bien en chassant les dénominateurs, et faisant passer tout dans le même membre,

$$(x-x')^2+(y-y')^2-(z-z')^2\cot^2 V=0,$$
$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0.$$

La première équation de ce résultat est visiblement celle d'un cône droit dont l'axe est vertical, dont le sommet est au point donné x', y', z', et dont le rayon de la base $=(z-z')\cot V$: la seconde équation est celle d'un plan passant par le même point et coïncidant avec le plan donné. Or, l'une et l'autre équation devant s'accorder ensemble, il s'ensuit que la droite cherchée est l'intersection même du plan et du cône dont il s'agit. Le problème que l'on considère est donc, en général, susceptible de deux solutions.

La Trigonométrie sphérique fournit une solution fort simple de ce problème, quand on connaît l'inclinaison du plan donné. En effet, soit i cette inclinaison, et, comme ci-dessus, V l'angle que la droite à tracer fait avec l'horizon. Si, par le point donné, on mène dans le plan incliné une ligne horizontale, et que l'on désigne par φ l'angle de ces deux droites, on trouvera aisément, par la propriété du triangle sphérique rectangle, que

$$\sin\varphi=\frac{\sin V}{\sin i}.$$

On peut voir, dans le *Traité de Topographie*, 2e édit., pag. 362, comment on résout encore plus simplement le même problème sur le terrain.

THÉORÈME.

168. *Si des foyers d'un ellipsoïde alongé, c'est-à-dire d'un ellipsoïde engendré par la révolution d'une ellipse autour de son grand axe, on abaisse des perpendiculaires sur le plan tangent, le produit de ces perpendiculaires sera égal au carré du demi-second axe.*

On sait, par le n° 140, que l'équation de l'ellipsoïde alongé est

$$a^2z^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

$2a$ étant le grand axe et $2b$ le petit axe de l'ellipse génératrice. Ainsi l'équation du plan tangent à cette surface de révolution, est (n° 148)

$$a^2zz' + a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2,$$

x, y, z étant les coordonnées du point de contact.

Cela posé, puisque la longueur P de la perpendiculaire abaissée d'un point x', y', z', sur un plan de l'équation $Ax' + By' + Cz' + D = 0$, est

$$P = \frac{D + Ax' + By' + Cz'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}},$$

on a

$$A = b^2x, \quad B = a^2y, \quad C = a^2z, \quad D = -a^2b^2.$$

Mais les foyers F, F′ étant situés sur l'axe des x, à une distance de l'origine $= c$ et $= -c$, il s'ensuit que y' et z' sont nulles pour ces points; donc, par rapport au foyer F, on a

$$P = \frac{b^2(cx - a^2)}{\sqrt{a^2(a^2b^2 - b^2x^2) + b^4x^2}},$$

et par rapport au foyer F′, on a

$$P' = \frac{-b^2(cx + a^2)}{\sqrt{a^2(a^2b^2 - b^2x^2) + b^4x^2}},$$

donc

$$P \times P' = \frac{-b^4(c^2x^2 - a^2)}{a^2(a^2b^2 - b^2x^2) + b^4x^2};$$

mais $c^2 = a^2 - b^2$ (n° 130. L. C.); donc, comme le porte l'énoncé du théorème,

$$P \times P' = b^2.$$

Il est évident que l'ellipse jouit d'une propriété analogue.

THÉORÈME.

169. *Si trois plans rectangulaires touchent constamment un même ellipsoïde ou un même hypsrboloïde, le sommet de l'angle trièdre qu'ils forment est toujours sur la surface d'une sphère concentrique à cet ellipsoïde ou à cet hyperboloïde, et dont le rayon est égal à la racine carrée de la somme des carrés des trois demi-axes.*

(Ce théorème est dû à Monge.)

L'équation des surfaces du second degré qui ont un centre, est $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$, et les trois demi-axes sont $\sqrt{\frac{1}{A}}$, $\sqrt{\frac{1}{B}}$, $\sqrt{\frac{1}{C}}$. Si donc $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$, désignent les coordonnées des trois points de contact, on aura

$$\left.\begin{aligned} Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 &= 1, \\ Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 &= 1, \\ Ax'''^2 + By'''^2 + Cz'''^2 &= 1, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

et les équations des trois plans tangens seront, n° 148,

$$\left.\begin{aligned} Ax'x + By'y + Cz'z &= 1, \\ Ax''x + By''y + Cz''z &= 1, \\ Ax'''x + By''y + Cz'''z &= 1; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

puis pour exprimer que ces plans sont rectangulaires, on aura, n° 125, ces relations,

$$\left.\begin{array}{l} A^2x'x'' + B^2y'y'' + C^2z'z'' = 0, \\ A^2x'x''' + B^2y'y''' + C^2z'z''' = 0, \\ A^2x''x''' + B^2y''y''' + C^2z''z''' = 0. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Or, si l'on fait $Ax' = a$, $Ax'' = a'$, $Ax''' = a''$; $By' = b$; $By'' = b'$, $By''' = b''$; $Cz' = c$, $Cz'' = c'$, $Cz''' = c''$; les équations (1) et (3) deviendront respectivement,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a^2}{A} + \dfrac{b^2}{B} + \dfrac{c^2}{C} = 1, \\ \dfrac{a'^2}{A} + \dfrac{b'^2}{B} + \dfrac{c'^2}{C} = 1, \\ \dfrac{a''^2}{A} + \dfrac{b''^2}{B} + \dfrac{c''^2}{C} = 1, \end{array}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} aa' + bb' + cc' = 0, \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0; \end{array}\right\} \quad (5)$$

et si, pour abréger, on suppose que

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = R^2, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = R'^2, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = R''^2, \end{array}\right\} \quad (6)$$

on pourra conclure, d'après la théorie du n° 137, que les relations (5) et (6) donnent lieu à celles-ci :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{ab}{R^2} + \dfrac{a'b'}{R'^2} + \dfrac{a''b''}{R''^2} = 0, \\ \dfrac{ac}{R^2} + \dfrac{a'c'}{R'^2} + \dfrac{a''c''}{R''^2} = 0, \\ \dfrac{bc}{R^2} + \dfrac{b'c'}{R'^2} + \dfrac{b''c''}{R''^2} = 0, \end{array}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a^2}{R^2} + \dfrac{a'^2}{R'^2} + \dfrac{a''^2}{R''^2} = 1, \\ \dfrac{b^2}{R^2} + \dfrac{b'^2}{R'^2} + \dfrac{b''^2}{R''^2} = 1, \\ \dfrac{c^2}{R^2} + \dfrac{c'^2}{R'^2} + \dfrac{c''^2}{R''^2} = 1. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Maintenant il est aisé d'obtenir une équation unique entre x, y, z, et indépendante des coordonnées des points de contact : en effet, élevant au carré les équations (2) des plans tangens, après avoir divisé la première par R, la seconde par R′, la troisième par R″ ; et ajoutant ensuite ces carrés, on aura, en vertu des équations (7) et (8),

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} + \frac{1}{R''^2};$$

ajoutant de même les équations (4), après avoir divisé la première par R^2, la seconde par R'^2, la troisième par R''^2, on aura, à cause des équations (8),

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} + \frac{1}{R''^2};$$

donc

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C};$$

résultat qui renferme le théorème qu'on avait en vue de démontrer, et duquel on tire pour conséquence, que, dans le cas de l'hyperboloïde, il peut arriver qu'il n'existe qu'un point, ou qu'il n'y en ait aucun par lequel on puisse mener trois plans rectangulaires et tangens à la surface de ce corps. C'est ainsi que M. Poisson a prouvé la chose dans le n° 7 de la *Correspondance sur l'École Polytechnique.*

On démontrerait par une méthode semblable, cet autre théorème, que *la surface engendrée par le point d'intersection de trois plans rectangulaires, dont l'un est toujours tangent à une sphère de rayon* R, *l'autre à une sphère de rayon* R′, *et la troisième à une sphère de rayon* R″ (*ces sphères étant concentriques*), *est une quatrième sphère concentrique aux trois premières, et dont le rayon est* $\sqrt{R^2 + R'^2 + R''^2}$; mais il existe un moyen bien plus simple de s'assurer de la vérité de cette proposition.

Des propriétés des projections stéréographique et orthographique des cercles de la sphère.

170. Pour généraliser la définition donnée au n° 156, nous observerons que si entre un corps et l'œil on place un plan ou une surface quelconque, et que l'on conçoive des rayons visuels à divers points du corps, les intersections de ces rayons avec la surface interposée seront les représentations ou les *projections stéréographiques* de tous ces points. Lorsque l'œil est supposé à une distance infinie du plan de projection, ou du *tableau perspectif*, les lignes projetantes sont toutes parallèles entre elles; et si en outre, elles sont perpendiculaires à ce même tableau, la projection est dite *orthographique:* telle est celle que nous avons déjà considérée. Nous nous bornerons à examiner les propriétés les plus remarquables de ces deux espèces de projections qui servent de fondement à la construction des mappemondes, et nous renverrons, pour de plus amples détails, au *Traité de Topographie*, etc. 2me édition.

L'équation de la sphère est, en plaçant l'origine des coordonnées au centre,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

celle du plan d'un de ses cercles est

$$z = Ax + By + D,$$

et les projections verticales et orthographiques de la génératrice du *cône optique* sont en général

$$x - a = m(z - c), \quad y - b = n(z - c);$$

mais en supposant que les coordonnées du sommet de ce cône soient $a = 0$, $b = 0$, $-c$, on a simplement

$$x = m(z + c), \quad y = n(z + c).$$

Ainsi l'équation du plan précédent devient

$$z = Am(z + c) + Bn(z + c) + D.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de la sphère, et éliminant m, n, on a

$$x^2+y^2+\frac{[Acx+Bcy+D(z+c)]^2}{(D+c)^2}$$
$$=\frac{r^2(z+c-Ax-By)^2}{(D+c)^2}; \qquad (M)$$

ou développant les numérateurs, et faisant passer tous les termes dans un même membre, il vient enfin

$$\left.\begin{array}{l}(x^2+y^2)(D+c)^2+(c^2-r^2)(Ax+By)^2\\ +(z+c)^2(D^2-r^2)+2(cD+r^2)(z+c)(Ax+By)\end{array}\right\}=0.$$

Telle est l'équation de la surface conique qui a pour base un cercle quelconque de la sphère, et dont le sommet est dans l'axe des z, au-dessous du plan des xy supposé horizontal.

Dans la projection généralement connue sous le nom de *projection stéréographique de Ptolémée* (*), le point de vue est sur la surface de la sphère, à l'extrémité du rayon perpendiculaire au tableau perspectif : or, dans ce cas, $c=r$; on a donc pour l'équation du cône optique,

$$\left.\begin{array}{l}(x^2+y^2)(D+r)+(z+r)^2(D-r)\\ +2r(z+r)(Ax+By)\end{array}\right\}=0; \qquad (M')$$

et si l'on fait dans celle-ci $z=0$, la projection stéréographique du cercle qui sert de base au cône, aura pour équation

$$x^2+y^2+\frac{2Ar^2x}{D+r}+\frac{2Br^2y}{D+r}=\frac{(r-D)r^2}{D+r}. \qquad (1)$$

Il résulte de là que *les projections stéréographiqxes des cercles de la sphère sont elles-mêmes des cercles.*

L'équation des projections des parallèles perpendiculaires

(*) Delambre attribue à Hipparque l'invention de cette projection; mais c'est un sujet de critique qu'il ne nous appartient pas de discuter.

au plan xz résulte de la précédente, en y faisant $B = 0$, parce qu'alors celle de la base du cône est seulement $z = Ax + D$; on a donc

$$x^2 + y^2 + \frac{2Ar^2x}{D+r} = \left(\frac{r-D}{D+r}\right)r^2. \qquad (2)$$

Quant aux grands cercles de la sphère, leur plan a pour équation $z = Ax + By$; ainsi celle (1) devient, à cause de $D = 0$, dans le cas actuel,

$$x^2 + y^2 - 2Arx + 2Bry = r^2. \qquad (3)$$

Si, dans cette équation, qui est celle de la projection d'un grand cercle, on fait $(x_{,} - Ar) = x$, $(y_{,} - Br) = y$, pour faire disparaître les premières puissances des variables, on aura

$$x_{,}^2 + y_{,}^2 = r^2(1 + A^2 + B^2):$$

les coordonnées du centre de cette projection, sont donc Ar et Br, ou simplement A et B, en faisant r égal à l'unité.

Lorsque l'on place le point de vue au centre de la sphère, et que l'on projette sur un plan qui lui est tangent, il faut, dans l'équation (M), faire $c = 0$, et $z = r$, ce qui la réduit à

$$x^2 + y^2 + r^2 = \frac{r^4}{D^2}(r - Ax - By)^2. \qquad (4)$$

Ainsi, dans la *projection centrale*, les cercles de la sphère sont représentés par l'une des courbes du second ordre, excepté les grands cercles qui le sont par des droites, puisqu'alors cette dernière équation se réduit à $r - Ax - By = 0$, à cause de $D = 0$. C'est cette projection que l'on considère en Gnomonique.

Dans la projection orthographique, le point de vue étant censé à une distance infinie du tableau perspectif, on a $c = \infty$, et pour lors (M) devient

$$x^2 + y^2 + (Ax + By + D)^2 = r^2; \qquad (5)$$

c'est-à-dire que les cercles de la sphère sont, en général, représentés par des ellipses (n° 49). Il est évident que ces dernières courbes sont les bases des surfaces cylindriques dont les cercles de la sphère dirigent le mouvement des génératrices.

171. Cherchons à présent le rapport qui existe en général entre l'angle et sa projection, de deux cercles qui se rencontrent sur la sphère.

Sur une surface courbe quelconque, l'angle formé par deux courbes planes qui se coupent, se mesure par l'angle que forment les deux tangentes menées à chacune de ces courbes au point de leur commune section. Relativement à la sphère, on peut toujours mener un plan par son centre et par l'une des tangentes dont il s'agit : alors la section circulaire qui en résulte a pour tangente celle que contient ce plan, et la perspective de cette section est touchée par la perspective de sa tangente.

Cela posé, prenons, pour plan des xz, celui qui passe par le centre de la sphère et par le point d'intersection des deux tangentes à sa surface, et plaçons toujours à ce centre l'origine des coordonnées rectangles.

Les équations des plans passant par les deux tangentes à la surface de la sphère et par cette origine, seront

$$\left.\begin{aligned} z &= Ax + By, \\ z &= Ax + B'y, \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

et l'on aura respectivement, pour les équations des projections stéréographiques des courbes circulaires résultantes des sections de ces plans,

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2Ax + 2By &= 1, \\ x^2 + y^2 + 2Ax + 2B'y &= 1; \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

le rayon de la sphère étant pris pour unité [équation (3)].

Si, par le point où se coupent ces deux projections, l'on mène une tangente à chacune, l'angle de ces tangentes sera la perspective de l'angle des tangentes à la sphère. Ainsi, désignant par θ et θ' les angles que les premières tangentes font avec l'axe des x, on trouvera, par le n° 148, que les équations (b) donnent respectivement

$$\operatorname{tang}\theta = -\frac{x+A}{y+B},$$

$$\operatorname{tang}\theta' = -\frac{x+A}{y+B'}.$$

Ces rapports se réduisent nécessairement à ceux-ci :

$$\operatorname{tang}\theta = -\frac{\sqrt{1+A^2}}{B}, \quad \operatorname{tang}\theta' = -\frac{\sqrt{1+A^2}}{B'};$$

car, si l'on soustrait l'une de l'autre les équations (b), on en obtiendra une nouvelle qui ne pourra être satisfaite, à moins que y ne soit nulle. On a donc

$$y = 0, \quad \text{et} \quad x = -A \pm \sqrt{1+A^2}.$$

Maintenant, l'on sait qu'en général

$$\operatorname{tang}(\theta-\theta') = \frac{\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\theta'}{1+\operatorname{tang}\theta\operatorname{tang}\theta'};$$

ainsi, pour le cas actuel,

$$\operatorname{tang}(\theta-\theta') = \frac{(B-B')\sqrt{1+A^2}}{A^2+BB'+1}.$$

Telle est l'expression de la tangente de la projection de l'angle cherché; mais cet angle est aussi celui des deux plans (a), puisqu'ils font un angle V dont le cosinus est (n° 125),

$$\cos V = \frac{A^2+BB'+1}{\sqrt{A^2+B^2+1}\,\sqrt{A^2+B'^2+1}},$$

ou dont

$$\operatorname{tang} V = \frac{(B-B')\sqrt{1+A^2}}{A^2+BB'+1}.$$

Donc, *dans la projection stéréographique, la perspective de l'angle de deux cercles quelconques ne diffère point de cet angle.*

Le calcul précédent aurait été plus simple si nous eussions supposé une des tangentes dans le plan xz ; mais nous avons voulu traiter la question dans toute sa généralité.

Nous observerons qu'en appliquant la même méthode aux projections centrale et orthographique des cercles de la sphère, on parviendrait à ces deux résultats assez remarquables; savoir :

1°. Que dans la projection centrale, la tangente de l'angle de deux méridiens, dont l'un coïncide avec le plan xz, est à la tangente de sa projection, comme le rayon des tables est au sinus de la hauteur du pôle.

2°. Que, dans la projection orthographique, les tangentes de ces deux angles sont précisément dans un rapport inverse du précédent.

La première proportion, démontrée d'une manière très différente dans tous les traités de Gnomonique, y est énoncée ainsi : Pour le quadran horizontal, la tangente de la distance angulaire du soleil au méridien, est à la tangente de l'angle que fait la ligne horaire avec la méridienne, comme le sinus total est au sinus de la latitude du lieu. (*Voyez* le petit Mémoire que nous avons publié sur cette matière dans *la Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, tom. II, p. 397.)

PROBLÈME.

172. *Trouver les cercles qui touchent à la fois trois cercles donnés sur une sphère.*

Les cercles donnés et l'un de ceux à décrire pouvant être considérés comme les bases de cônes ayant leur sommet commun au centre de la sphère, le problème proposé

revient évidemment à celui : *Trois cônes de même sommet étant donnés, construire un quatrième cône de même sommet qu'eux, qui les touche tous trois.*

Voici l'élégante solution qu'en a donnée M. Gergonne ; elle est tout-à-fait conforme à celle du n° 85.

Solution. Soient C, C′, C″ trois cônes droits donnés ayant leur sommet commun au centre d'une sphère, pris pour origine des coordonnées rectangles ; et désignons respectivement par r, r', r'' les angles générateurs de ces cônes. Si nous supposons que l'axe du dernier cône C″ soit celui des z, et que nous représentions par abc, $a'b'c'$, respectivement les cosinus des angles que forment avec les axes des coordonnées les axes du premier et du second cône ; on aura ces relations (n° 120)

$$(1)\qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$
$$(2)\qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1.$$

Désignons par A, B, C les cosinus des angles que l'axe du cône droit cherché forme avec les mêmes axes des coordonnées, et par R l'angle générateur de ce cône ; on aura également

$$(3)\qquad A^2 + B^2 + C^2 = 1.$$

Maintenant, si l'on veut que ce quatrième cône touche extérieurement les trois cônes donnés, il faudra que l'angle que son axe fera avec celui de chacun d'eux soit égal à la somme de leurs angles générateurs ; ce qui donnera [équation (7), n° 131]

$$(4)\qquad aA + bB + cC = \cos(R + r),$$
$$(5)\qquad a'A + b'B + c'C = \cos(R + r'),$$
$$(6)\qquad C = \cos(R + r'').$$

Ces dernières équations étant combinées avec l'équation (3) fourniraient l'angle générateur R du cône cherché, et la position de son axe, c'est-à-dire les valeurs de A, B, C, lesquelles seraient données chacune par une équation

du second degré. Ainsi le problème est évidemment susceptible de deux solutions, ou, ce qui est de même, il y a deux cônes cherchés, dont chacun a une ligne de contact avec l'un quelconque des cônes donnés. Ces deux lignes passant par le centre de la sphère sont donc situées dans un plan dont la recherche donne simplement lieu à un problème du premier degré.

Si, par exemple, le cône cherché touche les cônes C′, C″, un des lieux de la ligne de contact dont un des points a pour coordonnées x, y, z, est celui de la surface du cône C″, et est exprimé analytiquement par

$$(7) \qquad x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tang}^2 r'';$$

et puisque cette ligne doit être dans le plan que déterminent les axes des deux cônes, il s'ensuit qu'on a nécessairement

$$(8) \qquad Ay = Bx \text{ (*)}.$$

En éliminant donc A, B, C, R entre les cinq équations (3, 4, 5, 6, 8), l'équation résultante en xyz serait celle du second lieu demandé. Mais pour combiner ces équations de manière à trouver en place du lieu cherché un lieu plus simple de la ligne de contact, nous profiterons de la relation (7) qui fait que des équations (3, 6, 8) on tire

---

(*) En effet, si le plan dont il s'agit, qui est vertical, fait l'angle φ avec celui des xz, il fera l'angle $100^G - \varphi$ avec celui des yz; et si $+\theta$ est l'angle de l'axe du cône C″ avec le plan des xy, on aura par la propriété du triangle sphérique rectangle,

$$A = \cos\theta \cos\varphi, \quad B = \cos\theta \sin\varphi;$$

d'où

$$\frac{B}{A} = \operatorname{tang}\varphi;$$

mais $\operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{x}$; donc $Ay = Bx$.

$$A = \frac{x \sin(R + r'')}{z \tang r''},$$

$$B = \frac{y \sin(R + r'')}{z \tang r''},$$

$$C = \frac{z \cos(R + r'') \tang r''}{z \tang r''}.$$

De là les équations (4, 5) deviendront

$$(ax + by)\sin(R + r'') + cz\tang r'' \cos(R + r'') = z\tang r'' \cos(R + r),$$
$$(a'x + b'y)\sin(R + r'') + c'z\tang r'' \cos(R + r'') = z\tang r'' \cos(R + r');$$

et à cause de

$$\cos(R + r) = \cos[(R + r'') - (r'' - r)]$$
$$= \cos(r'' - r)\cos(R + r'') + \sin(r'' - r)\sin(R + r''),$$
$$\cos(R + r') = \cos[(R + r'') - (r'' - r')]$$
$$= \cos(r'' - r')\cos(R + r'') + \sin(r'' - r')\sin(R + r''),$$

les deux équations précédentes se changeront en celles-ci :

$$\left.\begin{array}{l}[(ax + by) - z\tang r'' \sin(r'' - r)]\tang(R + r'') \\ \qquad + z\tang r''[c - \cos(r'' - r)]\end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}[(a'x + b'y) - z\tang r'' \sin(r'' - r')]\tang(R + r'') \\ \qquad + z\tang r''[c' - \cos(r'' - r')]\end{array}\right\} = 0;$$

éliminant enfin tang $(R + r'')$, il vient

$$(9)\quad \frac{(ax + by) - z\tang r'' \sin(r'' - r)}{c - \cos(r'' - r)} = \frac{(a'x + b'y) - z\tang r'' \sin(r'' - r')}{c' - \cos(r'' - r')}.$$

Telle est l'équation d'un plan dont la commune section avec le cône C'' représente la droite suivant laquelle ce cône doit être touché par le cône cherché. Comme cette équation reste la même lorsqu'on change simultanément les signes des angles r, r', r'', il est évident que pour les huit combinaisons dont les signes de ces angles sont susceptibles, ou les huit solutions du problème, cette équation n'acquiert que

quatre formes distinctes, à chacune desquelles répondent conséquemment deux solutions.

Le plan exprimé par l'équation (9) sera construit, si l'on connaît les directions de deux droites qui y sont contenues, c'est-à-dire si l'on trouve deux systèmes de deux équations en x, y, z, susceptibles de rendre identique l'équation (9): or, parmi le nombre infini de manières de parvenir à ce but, choisissons les deux suivantes. D'abord égalons séparément les deux membres de cette équation (9) à $z \tang^2 r''$, ensuite égalons-les à $-z$; il viendra, après les réductions convenables,

$$(10)\begin{cases}(ax+by)\cos^2 r'' = z\,(c\sin r'' - \sin r)\sin r'' \\ (a'x+b'y)\cos^2 r'' = z\,(c'\sin r'' - \sin r')\sin r''\end{cases}$$

$$(11)\begin{cases}(ax+by)\cos r'' = z\,(\cos r - c\cos r''), \\ (a'x+b'y)\cos r'' = z\,(\cos r' - c'\cos r'').\end{cases}$$

On remarquera, en rapprochant ces résultats de ceux obtenus aux nos 153 et 145, que les plans (10) dont la commune section représente une des droites cherchées, sont ceux des lignes de contact du cône C″ avec les plans tangens communs extérieurs tant à ce cône et au cône C, qu'au même cône et au cône C′; qu'en outre les plans (11) sont ceux suivant lesquels les cônes C, C′, coupent respectivement le cône C″, ou en d'autres termes, sont les plans radicaux tant à C et C″ qu'à C′ et C″ (n° 145); d'où il suit pour le cône cherché une construction analogue à celle indiquée au n° 85.

L'excellent Mémoire de M. Gergonne, dont ce qui précède est extrait, et qui est inséré dans le tom. IV des *Annales de Mathém.*, p. 349, contient d'autres remarques très intéressantes que nous supprimons ici, moins pour abréger que pour laisser au lecteur une occasion d'exercer sa sagacité en cherchant à compléter lui-même cette solution, l'une des plus propres à constater l'élégance et la généralité des résultats de la Géométrie analytique. C'est aussi

pour cette raison que nous l'engageons à appliquer les raisonnemens du n° 85 à la recherche d'une sphère tangente à quatre autres sphères données: problème susceptible de seize solutions, que Fermat a résolu pour la première fois par un moyen assez détourné, mais dont on possède maintenant plusieurs solutions géométriques et analytiques très directes et très élégantes, consignées dans le Journal de l'Ecole Polytechnique, 17e cahier, page 129; dans la Correspondance sur cette école, tome II, p. 425 (janvier 1813); enfin, dans la Géométrie descriptive de M. Hachette, p. 160 et 265, où l'on trouve le développement des deux solutions que nous avons indiquées à la fin du n° 154.

Analyse des principales propriétés du tétraèdre.

173. Dans un très beau Mémoire inséré parmi ceux de l'Académie de Berlin, année 1773, Lagrange, en donnant une théorie analytique de la pyramide triangulaire, s'est principalement proposé de démontrer, par la seule considération des coordonnées rectangles, que les questions qui paraissent être le plus du ressort de la Géométrie, peuvent être traitées avec beaucoup de détail et de succès par le calcul algébrique. Quoique nous nous proposions de suivre ici une marche analogue à celle de cet illustre géomètre, nous éviterons cependant toute opération analytique qui ne serait point du domaine des élémens, ou qui serait trop compliquée.

[Fig. 90.] Soit AMM'M'' un tétraèdre quelconque ayant pour base le triangle MM'M'', et son sommet A à l'origine des coordonnées rectangles. Si l'on désigne par

$$\left.\begin{matrix} x, \\ y, \\ z, \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x', \\ y', \\ z', \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x'', \\ y'', \\ z'', \end{matrix}\right\}$$

les coordonnées rectangles des points

M, M', M'',

et que l'on fasse

$$\left.\begin{array}{lll} AM = a, & AM' = a', & AM'' = a'', \\ M'M'' = c, & MM'' = c', & MM' = c'', \end{array}\right\} (*)$$

on aura

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = a'^2, \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 = a''^2, \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} (x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2 = c^2, \\ (x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2 = c'^2, \\ (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 = c''^2. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Développant les premiers membres de ces trois dernières équations, simplifiant, à l'aide des premières, et faisant, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l} x'x'' + y'y'' + z'z'' = b, \\ x\,x'' + y\,y'' + z\,z'' = b', \\ x\,x' + y\,y' + z\,z' = b'', \end{array}\right\} \quad (3)$$

il viendra

$$\left.\begin{array}{l} a'^2 + a''^2 - 2b = c^2, \\ a^2 + a''^2 - 2b' = c'^2, \\ a^2 + a'^2 - 2b'' = c''^2, \end{array}\right\} \quad (4)$$

et par conséquent

$$b = \frac{a'^2+a''^2-c^2}{2},\ b' = \frac{a^2+a''^2-c'^2}{2},\ b'' = \frac{a^2+a'^2-c''^2}{2}.$$

Si l'on veut mettre à la place des arêtes c, c', c'' les angles $\gamma, \gamma', \gamma''$, qui leur sont opposés au sommet du tétraèdre, on aura, en vertu de la propriété du triangle scalène, n° 3,

(*) Au moyen de cette notation, on pourrait se passer de figure, car les arêtes opposées aux angles M, M', M'' du triangle MM'M'' sont désignées par des lettres c qui portent le même accent, tandis que les arêtes qui aboutissent au sommet de la pyramide sont représentées par des a.

$$b = a'a'' \cos\gamma, \quad b' = aa'' \cos\gamma', \quad b'' = aa' \cos\gamma'',$$

et si l'on désigne par $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha'}{2}, \frac{\alpha''}{2}$ les aires des triangles AM'M'', AMM'', AMM', on aura, en vertu du n° 3,

$$\alpha = aa' \sin\gamma, \ \alpha' = aa'' \sin\gamma', \ \alpha'' = aa' \sin\gamma'',$$

et par conséquent

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= a'^2a''^2 - b^2, \\ \alpha'^2 &= a^2a''^2 - b'^2, \\ \alpha''^2 &= a^2a'^2 - b''^2; \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

quant au triangle MM'M'' dont les côtés sont c, c', c'', son aire Σ sera donnée par la formule

$$16\Sigma^2 = 4c^2c'^2 - (c^2 + c'^2 - c''^2)^2;$$

ou substituant pour c, c', c'', leurs valeurs (4), par celle-ci:

$$4\Sigma^2 = (a^2 + a''^2 - 2b')(a'^2 + a''^2 - 2b) - (a''^2 - b - b' + b'')^2.$$

Enfin, effectuant les opérations indiquées, simplifiant au moyen des formules (5), et faisant pour abrèger

$$\left.\begin{aligned} b'b'' - a^2b &= \beta, \\ bb'' - a'^2b' &= \beta', \\ bb' - a''^2b'' &= \beta'', \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

l'aire de la base du tétraèdre sera

$$\Sigma = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + 2(\beta + \beta' + \beta'')}}{2}.$$

Pour procéder à la recherche du volume V du tétraèdre, en fonction des coordonnées de ses sommets, il faut introduire l'expression de sa hauteur h et celle de l'aire Σ de sa base MM'M'' dans la formule $V = \frac{\Sigma h}{3}$. Or, on sait (n° 124) que lorsque P désigne la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point qui a pour coordonnées x, y, z, sur un plan dont l'équation est $Ax + By + Cz + D = 0$, on a

$$P = \frac{D + Ax_{,} + By_{,} + Cz_{,}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

mais dans le cas actuel, $x_{,} = y_{,} = z_{,} = 0$, puisque le sommet A de la pyramide est à l'origine des axes; ainsi on a simplement

$$h = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Le moyen de déterminer les coefficiens constans de l'équation du plan de la base MM′M″, d'après la condition que cette base passe par les points MM′M″, est d'opérer comme dans le n° 122; mais pouvant ici faire usage des résultats qui y sont rapportés, on aura, en diminuant toutes les lettres d'un accent, pour se conformer à la notation présente,

$$\begin{aligned}
A &= z'y'' - y'z'' + yz'' - zy'' + zy' - yz', \\
B &= x'z'' - z'x'' + zx'' - xz'' + xz' - zx', \\
C &= y'x'' - x'y'' + xy'' - yx'' + yx' - xy', \\
D &= xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x''.
\end{aligned}$$

Soit, pour simplifier,

$$\left.\begin{aligned}
&y'z'' - z'y'' = \xi, \; z'x'' - x'z'' = \eta, \; x'y'' - y'x'' = \zeta, \\
&zy'' - yz'' = \xi', \; xz'' - zx'' = \eta', \; yx'' - xy'' = \zeta', \\
&yz' - zy' = \xi'', \; zx' - xz' = \eta'', \; xy' - yx' = \zeta'';
\end{aligned}\right\} (7)$$

les trois premières équations ci-dessus deviendront, en vertu de celle-ci,

$$\begin{aligned}
A &= -(\xi + \xi' + \xi''), \\
B &= -(\eta + \eta' + \eta''), \\
C &= -(\zeta + \zeta' + \zeta'');
\end{aligned}$$

et l'on aura alors, pour la hauteur de la pyramide,

$$h = \frac{D}{\sqrt{(\xi + \xi' + \xi'')^2 + (\eta + \eta' + \eta'')^2 + (\zeta + \zeta' + \zeta'')^2}};$$

expression qui acquerra une nouvelle forme, à l'aide de la considération suivante, par laquelle on évite les artifices de calcul employés par Lagrange.

Il résulte du n° 127 que le carré de l'aire Σ du triangle $MM'M''$ est égal à la somme des carrés des aires de ses trois projections. Or, ξ est le double de l'aire de la projection du triangle $AM'M''$ sur le plan des yz, η est le double de l'aire de la projection du même triangle sur le plan des xz, ζ est pareillement le double de l'aire de la projection de ce triangle sur le plan des xy, et ainsi de suite; d'où il est aisé de conclure qu'en désignant respectivement par σ, σ', σ'', les trois projections orthogonales de l'aire Σ sur les plans des yz, des xz, et des xy, on a

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\,A,\ \sigma' = \tfrac{1}{2}\,B,\ \sigma'' = \tfrac{1}{2}\,C,$$

et par suite

$$\Sigma^2 = \sigma^2 + \sigma'^2 + \sigma''^2 = \tfrac{1}{4}\,(A^2 + B^2 + C^2);$$

ce qui donne à la hauteur h cette forme,

$$h = \frac{D}{2\Sigma},$$

et au volume V de la pyramide, celle-ci :

$$V = \frac{\Sigma h}{3} = \frac{D}{6}.$$

La quantité D est donc le sextuple du volume du tétraèdre proposé ; et comme elle n'est composée que des coordonnées des sommets des angles du triangle $MM'M''$, on est en droit de conclure que la valeur de V exprime généralement le volume de tous les tétraèdres qui ont leur sommet à l'origine des axes.

Pour changer la quantité D en une autre qui ne dépende que des côtés de la pyramide, Lagrange fait usage de considérations analytiques très remarquables ; mais le résultat qu'il importe le plus de connaître pouvant s'obtenir par une méthode beaucoup moins longue, et sans renoncer pour cela à l'emploi des coordonnées rectangles, nous procéderons ainsi qu'il suit :

Remarquons d'abord qu'une pyramide triangulaire est le sixième d'un parallélépipède compris sous les trois arêtes contiguës de cette pyramide : ainsi, en supposant que le plan des xy soit une des faces du parallélépipède, de la face M'AM'', par exemple, et que l'arête a'' coïncide en même temps avec l'axe des x, ce qui ne peut manquer d'abréger les calculs; on aura nécessairement $z' = z'' = 0$, et z sera la hauteur du parallélépipède. Or, l'aire de sa base étant $a'a'' \sin\gamma$, son volume U sera

$$U = a'a''z \sin\gamma.$$

Reste donc à trouver z en fonction des données. Pour cela, reprenons les relations

$$xx' + yy' + zz' = aa' \cos\gamma'',$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

trouvées précédemment, lesquelles deviendront, à cause de $z' = 0$, et de $x = a \cos\gamma'$, $x' = a' \cos\gamma$, $y' = a' \sin\gamma$, comme il est aisé de le voir,

$$a \cos\gamma \cos\gamma' + y \sin\gamma = a \cos\gamma'',$$
$$y^2 + z^2 = a^2 \sin^2\gamma'.$$

Substituant dans cette seconde relation, pour y^2, sa valeur tirée de la première, on aura, après avoir extrait la racine,

$$z = \frac{a}{\sin\gamma}\sqrt{\sin^2\gamma \sin^2\gamma' - (\cos\gamma'' - \cos\gamma \cos\gamma')^2};$$

de là

$$U = aa'a''\sqrt{\sin^2\gamma \sin^2\gamma' - (\cos\gamma'' - \cos\gamma \cos\gamma')^2};$$

et si l'on change les sinus en cosinus, il viendra

$$U = aa'a''\sqrt{1 - \cos^2\gamma - \cos^2\gamma' - \cos^2\gamma'' + 2\cos\gamma\cos\gamma'\cos\gamma''}.$$

D'ailleurs la quantité qui est sous le premier radical résultant du produit des deux facteurs

$$\sin\gamma \sin\gamma' + \cos\gamma'' - \cos\gamma \cos\gamma' = -\cos(\gamma + \gamma') + \cos\gamma'',$$

et

$$\sin\gamma\sin\gamma' - \cos\gamma'' + \cos\gamma\cos\gamma' = \cos(\gamma - \gamma') - \cos\gamma'';$$

on a

$$\cos\gamma'' - \cos(\gamma + \gamma') = 2\sin\tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma' + \gamma'')\sin\tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma' - \gamma''),$$

et

$$\cos(\gamma - \gamma') - \cos\gamma'' = 2\sin\tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma'' - \gamma')\sin\tfrac{1}{2}(\gamma' + \gamma'' - \gamma).$$

Faisant donc

$$S = \tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma' + \gamma''),$$

le volume du parallélépipède sera encore exprimé symétriquement par la formule

$$U = aa'a''\sqrt{[\sin S \sin(S - \gamma)\sin(S - \gamma')\sin(S - \gamma'')]},$$

et l'on aura pour le volume du tétraèdre,

$$V = \frac{1}{6}U.$$

174. Nous venons de décomposer en facteurs la quantité radicale qui entre dans la valeur de U. Cette quantité, que nous désignerons par F, peut être mise sous d'autres formes, ainsi qu'il suit :

En prenant le triangle MAM′ pour base du tétraèdre AMM′M″, le volume de ce corps sera

$$V = \frac{aa'}{2}\sin(a, a')\frac{q}{3};$$

q désignant la hauteur de la pyramide, et (a, a') l'angle γ''. Or, il est aisé de se convaincre que si h exprime toujours la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan du triangle MM′M″, on a

$$a = \frac{h}{\cos(h, a)}, \quad a' = \frac{h}{\cos(h, a')}, \quad a'' = \frac{h}{\cos(h, a'')},$$

$$q = a''\sin(aa', a'');$$

(aa', a'') dénotant l'angle que l'arête a'' fait avec le plan aa'.

Il suit de là que la valeur précédente de V devient

$$V = \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\sin(a, a')\sin(aa', a'')}{\cos(h, a)\cos(h, a')\cos(h, a'')}; \qquad (m)$$

par la même raison,

$$V = \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\sin(a, a'')\sin(aa'', a')}{\cos(h, a)\cos(h, a')\cos(h, a'')}$$

$$= \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\sin(a', a'')\sin(a'a'', a)}{\cos(h, a)\cos(h, a')\cos(h, a'')};$$

et comme les facteurs $\sin(a, a')\sin(aa', a'')$, etc., restent constans, quelle que soit la grandeur des arêtes a, a', a'', ou celle de la perpendiculaire h, on doit en conclure que l'on a, en comparant ces dernières valeurs de V avec la seconde de U divisée par 6, trouvée page 390,

$$F = \sin(a, a')\sin(aa', a'') = \sin(a, a'')\sin(aa'', a')$$
$$= \sin(a', a'')\sin(a'a'', a);$$

or, (a, a') et (aa'', a') étant respectivement l'hypoténuse et le côté de l'angle droit d'un triangle sphérique rectangle, il est clair que

$$\frac{\sin(aa'', a')}{\sin(a, a')} = \sin(aa'', aa');$$

donc

$$\sin(aa', a'') = \sin(a, a'')\sin(aa'', aa'),$$
$$\sin(aa'', a') = \sin(a, a')\sin(aa', aa''),$$
$$\sin(a'a'', a) = \sin(a', a)\sin(a'a, a'a'').$$

On pourrait trouver d'autres expressions de F, non moins symétriques que les précédentes, mais un peu plus compliquées : par exemple, on sait, par le théorème du n° 115, que le carré de la base du tétraèdre, c'est-à-dire,

$$s^2 = \frac{a^2a'^2}{4}\sin^2(a, a') + \frac{a^2a''^2}{4}\sin^2(a, a'') + \frac{a'^2a''^2}{4}\sin^2(a', a'')$$
$$-2\,\frac{aa' \cdot aa''}{4}\sin(a, a')\sin(a, a'')\cos(aa', aa''),$$

$$-2\frac{aa'.a'a''}{4}\sin(a,a')\sin(a',a'')\cos(aa',a'a'')$$
$$-2\frac{aa''.a'a''}{4}\sin(a,a'')\sin(a',a'')\cos(aa'',a'a'');$$

donc si l'on multiplie cette équation par $\frac{h^2}{9}$, qu'on égale le produit résultant à la valeur de V^2 déduite de l'équation (m) précédente, et que l'on fasse

$$\cos(h,a)=A,\ \cos(h,a')=A',\ \cos(h,a'')=A'',$$

on obtiendra sans peine cette relation

$$F^2=\left\{\begin{array}{l} A^2\sin^2(a',a'')+A'^2\sin^2(a,a'')+A''^2\sin^2(a,a') \\ -2AA'\sin(a,a'')\sin(a',a'')\cos(aa'',a'a'') \\ -2AA''\sin(a,a')\sin(a',a'')\cos(aa',a'a'') \\ -2A'A''\sin(a,a')\sin(a,a'')\cos(aa',aa''). \end{array}\right.$$

C'est à ce résultat même que M. Français est parvenu, mais par une marche toute différente de la nôtre, comme on peut le voir dans son intéressant Mémoire cité au n° 128.

175. Actuellement soient m,n,p les coordonnées rectangles d'un point P placé où l'on voudra, au-dedans ou au-dehors de la pyramide, et désignons respectivement par R, G, G′, G″, les distances AP, PM, PM′, PM″; on aura évidemment

$$\left.\begin{array}{r} m^2+n^2+p^2=R^2, \\ (m-x)^2+(n-y)^2+(p-z)^2=G^2, \\ (m-x')^2+(n-y')^2+(p-z')^2=G'^2, \\ (m-x'')^2+(n-y'')^2+(p-z'')^2=G''^2. \end{array}\right\}\quad(A)$$

Développant ces trois dernières équations, réduisant à l'aide de la première et de celle (1), puis faisant, pour abréger,

$$k=\frac{a^2+R^2-G^2}{2},\ k'=\frac{a'^2+R^2-G'^2}{2},\ k''=\frac{a''^2+R^2-G''^2}{2},$$

il viendra

$$mx + ny + pz = k,$$
$$mx' + ny' + pz' = k',$$
$$mx'' + ny'' + pz'' = k''.$$

d'où l'on tire, en ayant égard aux relations (7) et à la valeur de D,

$$m = \frac{k\xi + k'\xi' + k''\xi''}{D},$$
$$n = \frac{k\eta + k'\eta' + k''\eta''}{D},$$
$$p = \frac{k\zeta + k'\zeta' + k''\zeta''}{D}.$$

Ces valeurs, qui sont générales, se simplifient dans le cas particulier où le point P est le centre de la sphère circonscrite. En effet, supposons $R = G = G' = G''$, on aura

$$k = \frac{a^2}{2},\ k' = \frac{a'^2}{2},\ k'' = \frac{a''^2}{2},$$

et

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{a^2\xi + a'^2\xi' + a''^2\xi''}{2D}, \\ n &= \frac{a^2\eta + a'^2\eta' + a''^2\eta''}{2D}, \\ p &= \frac{a^2\zeta + a'^2\zeta' + a''^2\zeta''}{2D}. \end{aligned}\right\} \quad (A')$$

Substituant ces valeurs dans la première équation (A), et remarquant que d'après les n°s 57, 127 et 173, on a

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \alpha^2,$$
$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \alpha'^2,$$
$$\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = \alpha''^2,$$

et que les équations (7) offrent cette relation,

$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = \beta,$$
$$\xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'' = \beta',$$
$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \beta'',$$

il viendra pour l'expression du rayon R de la sphère circonscrite au tétraèdre AMM′ M″,

$$R = \frac{\sqrt{\alpha^2 a^4 + \alpha'^2 a'^4 + \alpha''^2 a''^4 + 2(\beta'' a^2 a'^2 + \beta' a^2 a''^2 + \beta a'^2 a''^2)}}{2D};$$

et en y introduisant les angles γ, γ', γ'', on obtiendra, avec un peu d'attention, et après avoir chassé le radical,

$$R^2 = \frac{a^2 a'^2 a''^2}{144 V^2}\left[\begin{array}{l} a^2 \sin^2\gamma - 2a'a''(\cos\gamma - \cos\gamma'\cos\gamma'') \\ + a'^2 \sin^2\gamma' - 2aa''(\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\gamma'') \\ + a''^2 \sin^2\gamma'' - 2aa'(\cos\gamma'' - \cos\gamma\cos\gamma') \end{array}\right];$$

expression dans laquelle V désigne le volume du tétraèdre, et que M. Legendre a obtenue immédiatement par les principes de la Trigonométrie sphérique, note V de sa *Géométrie*.

Lagrange fait subir aux valeurs des coordonnées (A′) des transformations qui reposent sur des considérations analytiques très remarquables; mais on ne peut se dissimuler que la position du centre de la sphère circonscrite ne soit assez pénible à déterminer graphiquement par cette voie. Pour obvier à cet inconvénient, nous modifierons, sur ce point, les calculs de cet illustre géomètre, sans nuire néanmoins à l'élégance de sa méthode, et de manière à faire voir que les résultats de l'Analyse s'accordent avec ceux que l'on peut déduire de la seule Géométrie.

Reprenons, pour cet effet, les équations (A) dans lesquelles nous ferons $R = G = G' = G''$; nous aurons ce nouveau système

$$\left.\begin{array}{r} m^2 + n^2 + p^2 = R^2, \\ (m - x)^2 + (n - y)^2 + (p - z)^2 = R^2, \\ (m - x')^2 + (n - y')^2 + (p - z')^2 = R^2, \\ (m - x'')^2 + (n - y'')^2 + (p - z'')^2 = R^2. \end{array}\right\}(B)$$

Développant toutes les puissances indiquées, et, de la première équation, soustrayant successivement la seconde, la troisième et la quatrième, on n'aura plus que les trois in-

connues m, n, p, dont les valeurs seront données par les équations

$$\begin{aligned} 2mx + 2ny + 2pz - x^2 - y^2 - z^2 &= 0, \\ 2mx' + 2ny' + 2pz' - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= 0, \\ 2mx'' + 2ny'' + 2pz'' - x''^2 - y''^2 - z''^2 &= 0. \end{aligned}$$

Au lieu de simplifier celles-ci, comme nous l'avons fait précédemment, et de procéder à l'élimination, nous considérerons chacune de ces équations comme celle d'un plan dont les coordonnées de ses points sont m, n, p. Ces coordonnées devant être les mêmes dans les trois plans au point de leur commune section, c'est-à-dire au sommet de l'angle trièdre qu'ils forment entre eux, il s'ensuit que le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre proposé sera le sommet de cet angle.

En donnant aux équations précédentes la forme

$$\left.\begin{aligned} x\left(m-\frac{x}{2}\right)+y\left(n-\frac{y}{2}\right)+z\left(p-\frac{z}{2}\right)&=0, \\ x'\left(m-\frac{x'}{2}\right)+y'\left(n-\frac{y'}{2}\right)+\left(p-\frac{z'}{2}\right)&=0, \\ x''\left(m-\frac{x''}{2}\right)+y''\left(n-\frac{y''}{2}\right)+z''\left(p-\frac{z''}{2}\right)&=0, \end{aligned}\right\}\text{(C)}$$

on voit que la première équation, par exemple, est celle d'un plan assujetti à passer par un point dont les coordonnées sont $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$, $\frac{z}{2}$; point qui est visiblement le milieu de la corde AM de la sphère. Ainsi les plans dans lesquels est situé le centre cherché, passent par les milieux des arêtes du tétraèdre inscrit.

Il reste maintenant à connaître la position que ces plans doivent avoir à l'égard des cordes qu'ils coupent; or, les équations des projections verticales de la droite AM passant par l'origine, sont

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{y}{z}p, \\ n &= \frac{x}{z}p, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(D)}$$

en regardant m, n, p comme les coordonnées d'un point quelconque de cette droite, et p comme la coordonnée verticale.

De plus, le plan qui passe par le milieu de AM ayant pour équation la première du système (C), ses traces sur chacun des plans coordonnés sont

$$\left.\begin{aligned} m - \frac{x^2 + y^2}{2x} &= -\frac{z}{x}\left(p - \frac{z}{2}\right), \\ n - \frac{x^2 + y^2}{2y} &= -\frac{z}{y}\left(p - \frac{z}{2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(E)}$$

De la comparaison de celle-ci avec les équations (D) on conclut que les deux traces du plan sont respectivement perpendiculaires aux deux projections de la droite AM, n° 124. Donc le plan est perpendiculaire à la droite; donc enfin le centre de la sphère passant par quatre points donnés, est à l'intersection même des plans menés perpendiculairement aux milieux des trois droites qui joignent ces points.

Il est facile de voir que les deux premières équations (C) peuvent être mises sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{z}\left(m - \frac{x}{2}\right) + \frac{y}{z}\left(n - \frac{y}{2}\right) + \left(p - \frac{z}{2}\right) &= 0, \\ \frac{x'}{z'}\left(m - \frac{x'}{2}\right) + \frac{y'}{z'}\left(n - \frac{y'}{2}\right) + \left(p - \frac{z'}{2}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(F)}$$

Or, si l'on avait à la fois les relations $\frac{x}{z} = \frac{x'}{z'}$, $\frac{y}{z} = \frac{y'}{z'}$, elles exprimeraient non-seulement que les plans auxquels appartiennent les équations précédentes sont parallèles entre eux (n° 123), mais encore, elles indiqueraient que les points A, M, M′ sont en ligne droite. Il suit de là qu'il

est impossible, dans l'hypothèse actuelle, de faire passer une sphère par les quatre points donnés, puisque son centre ne peut être dans deux plans différens sans se trouver sur leur intersection. Mais ce problème admettrait une infinité de solutions si les quatre points étaient situés sur une même circonférence, parce qu'alors les plans menés perpendiculairement aux milieux de deux cordes quelconques de ce cercle, se couperaient tous deux à deux, suivant une seule et même droite.

176. Rapprochons-nous maintenant de la méthode de Lagrange, et, pour cela, supposons que le point P n'est plus le centre de la sphère circonscrite. Pour avoir la plus courte distance r de ce point à la base MM'M'' du tétraèdre, nous emploierons encore la formule du n° 124, savoir :

$$P = \frac{D + Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

et en y substituant, pour A, B, C, D, leurs valeurs calculées précédemment, on aura, en se conformant à la présente notation,

$$r = \frac{D - (\xi + \xi' + \xi'')m - (\eta + \eta' + \eta'')n - (\zeta + \zeta' + \zeta'')p}{\sqrt{(\xi + \xi' + \xi'')^2 + (\eta + \eta' + \eta'')^2 + (\zeta + \zeta' + \zeta'')^2}},$$

ou bien,

$$r = \frac{D - (\xi + \xi' + \xi'')m - (\eta + \eta' + \eta'')n - (\zeta + \zeta' + \zeta'')p}{\sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + 2(\beta + \beta' + \beta'')}}.$$

On peut modifier les valeurs A, B, C, D, de manière à ce qu'elles conviennent aux faces latérales de la pyramide. Pour cet effet, il suffit de supposer que le plan MM'M'' coïncide successivement avec les faces AM'M'', AMM'', AMM'; et c'est ce qui aura lieu, si l'on fait d'abord $x = y = z = 0$, puis $x' = y' = z' = 0$, ensuite $x'' = y'' = z'' = 0$; et pour les trois cas, $D = 0$, puisque les faces dont il est question passent par l'origine.

Soient donc ρ, ρ', ρ'' les perpendiculaires abaissées respectivement du point P sur ces faces. Si l'on fait attention que ces perpendiculaires sont négatives par rapport à r (n° 124), on a

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{\xi m + \eta n + \zeta p}{\alpha}, \\ \rho' &= \frac{\xi' m + \eta' n + \zeta' p}{\alpha'}, \\ \rho'' &= \frac{\xi'' m + \eta'' n + \zeta'' p}{\alpha''}; \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

et si, de l'équation r, on tire la valeur de D, on obtiendra, en vertu des équations précédentes,

$$D = r\sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + 2(\beta + \beta' + \beta'') + \rho\alpha + \rho'\alpha' + \rho''\alpha''};$$

formule qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier, car le tétraèdre AMM'M'' peut être considéré comme l'assemblage de quatre tétraèdres partiels qui auraient pour bases les faces du premier, et pour sommet commun le point P.

Lorsque toutes les arêtes du tétraèdre proposé sont égales, on a $b = b' = b'' = \frac{a^2}{2}$, et par suite $\alpha^2 = \alpha'^2 = \alpha''^2 = \frac{3}{4}a^4$;

$\beta = \beta' = \beta'' = -\frac{a^4}{4}$; donc $\beta = -\frac{\alpha^2}{3}$; donc

$$D = (r + \rho + \rho' + \rho'')\,\alpha.$$

Concluons de là *que si d'un point quelconque pris dans l'intérieur d'un tétraèdre régulier, on abaisse une perpendiculaire sur chaque face, la somme de ces quatre lignes sera toujours constante.* On conçoit bien que cette propriété est commune à tous les polyèdres dont les faces sont équivalentes.

En prenant le point P pour le centre de la sphère inscrite, on aura $r = \rho = \rho' = \rho''$; et si, pour abréger, on fait $\omega = \sqrt{[\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + 2(\beta + \beta' + \beta'')]}$, la formule pré-

cédente donnera

$$r = \frac{D}{\omega + \alpha + \alpha' + \alpha''};$$

c'est-à-dire, pour plus de simplicité,

$$r = \frac{3V}{S};$$

V désignant le volume, et S la surface de la pyramide. Telle est l'expression du rayon de la sphère inscrite. Nous ne nous arrêterons pas au calcul des coordonnées rectangles de son centre, parce que leurs valeurs peuvent se déduire sans difficulté des équations (8). D'ailleurs on doit naturellement inférer de la méthode du n° 149, que le centre de la sphère inscrite est situé dans des plans qui divisent en deux parties égales les angles dièdres de la pyramide : propriété analogue à celle du triangle rectiligne.

Si au lieu de rapporter les points de l'espace à des coordonnées rectangles, on les rapportait à des axes obliques et que l'on prît les arêtes mêmes du sommet du tétraèdre pour ces axes, plusieurs des propriétés que nous venons de découvrir par la méthode de Lagrange se manifesteraient sans aucun effort d'analyse et d'une manière très immédiate.

Nous engageons ceux qui désirent de connaître d'autres propriétés du tétraèdre, à lire le Mémoire cité de cet illustre géomètre, et la *Théorie des Transversales* par Carnot. Ils trouveront aussi sur ce sujet, un article fort intéressant de Monge, dans le n° 10 de la *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*. Voici deux des propositions nouvelles qui s'y trouvent énoncées :

1°. *Si l'on prolonge indéfiniment les six arêtes d'une pyramide triangulaire quelconque, on pourra inscrire entre ces six droites celle des surfaces du second degré que l'on voudra.*

2°. *En supposant toujours six arêtes de cette pyramide*

prolongées indéfiniment de part et d'autre, si l'on en considère quatre quelconques opposées entre elles deux à deux, il existe toujours un plan qui en se mouvant parallèlement à lui-même, les coupe toutes quatre dans des points qui sont toujours sur la circonférence d'un cercle.

Le 1er numéro du second volume de cette Correspondance renferme d'autres recherches de même nature.

THÉORÈMES.

177. *Dans tout ellipsoïde,*

1°. *La somme des carrés de trois diamètres conjugués quelconques, est égale à la somme des carrés des trois diamètres principaux;*

2°. *La somme des carrés des aires des trois faces adjacentes à l'un des angles trièdres du parallélépipède construit sur trois demi-diamètres conjugués quelconques, est égale à la somme des carrés des aires des trois faces adjacentes à l'un des angles trièdres du parallélépipède rectangle construit sur les trois demi-diamètres principaux;*

3°. *Enfin, le parallélépipède construit sur les trois axes est équivalent à celui que l'on construirait sur les trois diamètres conjugués.*

Désignons par a, b, c les trois demi-diamètres principaux d'un ellipsoïde, et par $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$ les coordonnées rectangles des extrémités de trois autres demi-diamètres conjugués quelconques a', b', c'; on aura, en prenant le centre de l'ellipsoïde pour origine des axes (n° 140),

$$\left.\begin{aligned} \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} &= 1, \\ \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} &= 1, \\ \frac{x'''^2}{a^2} + \frac{y'''^2}{b^2} + \frac{z'''^2}{c^2} &= 1; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

et puisque, par hypothèse, les lignes $2a'$, $2b'$, $2c'$, sont des

diamètres conjugués, le plan tangent à l'ellipsoïde et passant par l'extrémité de chacun de ces diamètres, sera parallèle à chacun des deux autres diamètres. Or, l'équation du plan tangent mené par l'extrémité de a', qui est le plan de contact, et dont les coordonnées sont x', y', z', est (n° 148),

$$\frac{x'}{a^2}x + \frac{y'}{b^2}y + \frac{z'}{c^2}z = 1,$$

et les équations du diamètre $2b$ sont (n° 119)

$$x = \frac{x''}{z''}z, y = \frac{y''}{z''}z;$$

pour que cette droite et le plan tangent soient parallèles entre eux, il faut que l'équation de condition du n° 126, ait lieu, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} + \frac{z'z''}{c^2} = 0;$$

ainsi, outre les équations (1) l'on aura ces trois autres

$$\left.\begin{aligned} \frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b'} + \frac{z'z''}{c^2} &= 1, \\ \frac{x'''x'}{a^2} + \frac{y'''y'}{b^2} + \frac{z'''z'}{c^2} &= 1, \\ \frac{x''x'''}{a^2} + \frac{y''y'''}{b^2} + \frac{z''z'''}{c^2} &= 1. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Faisant, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned} \frac{x'}{a} = m, \frac{y'}{b} = n, \frac{z'}{c} = p, \\ \frac{x''}{a} = m', \frac{y''}{b} = n', \frac{z''}{c} = p', \\ \frac{x'''}{a} = m'', \frac{y'''}{b} = n'', \frac{z'''}{b} = p'', \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

les trois équations ci-dessus se changeront évidemment en

celles-ci :

$$\left.\begin{array}{l} m^2 + n^2 + p^2 = 1, \\ m'^2 + n'^2 + p'^2 = 1, \\ m''^2 + n''^2 + p''^2 = 1, \end{array}\right\} (4) \quad \left.\begin{array}{l} mm' + nn' + pp' = 0, \\ m''m + n''n + p''p = 0, \\ m'm'' + n'n'' + p'p'' = 0; \end{array}\right\} (5)$$

et comme elles sont les mêmes que celles (8′, 7′) du n° 132, on aura en outre ces sept autres relations

$$\left.\begin{array}{l} m^2 + m'^2 + m''^2 = 1, \\ n^2 + n'^2 + n''^2 = 1, \\ p^2 + p'^2 + p''^2 = 1, \end{array}\right\} (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} (np' - pn')^2 + (n'p'' - n''p')^2 + (n''p - p''n)^2 = 1, \\ (pm' - mp')^2 + (p'm'' - m'p'')^2 + (p''m - m''p)^2 = 1, \\ (mn' - nm')^2 + (m'n'' - n'm'')^2 + (m''n - n''m)^2 = 1, \end{array}\right\} (7)$$

$$mn'p'' - mp'n'' + pm'n'' - nm'p'' + np'm'' - pn'm'' = 1, \quad (8)$$

ainsi qu'il est démontré au n° 133.

Maintenant, si l'on substitue dans ces sept dernières équations, pour $m, n, p, \ldots$ leurs valeurs (3), il viendra

$$\left.\begin{array}{l} x'^2 + x''^2 + x'''^2 = a^2, \\ y'^2 + y''^2 + y'''^2 = b^2, \\ z'^2 + z''^2 + z'''^2 = c^2, \end{array}\right\} (9)$$

$$\left.\begin{array}{l} (y'z'' - z'y'')^2 + (y''z''' - z''y''')^2 + (y'''z' - z'''y')^2 = b^2c^2, \\ (z'x'' - x'z'')^2 + (z''x''' - x''z''')^2 + (z'''x' - x'''z')^2 = c^2a^2, \\ (x'y'' - y'x'')^2 + (x''y''' - y''x''')^2 + (x'''y' - y'''x')^2 = a^2b^2, \end{array}\right\} (10)$$

$$x'y''z''' - x'z''y''' + z'x''y''' - y'x''z''' + y'z''x''' - z'y''x''' = abc; \quad (11)$$

et si les angles (a', b'), (a', c'), (b', c') que les demi-diamètres conjugués a', b', c' font deux à deux sont respectivement désignés par ι, ι', ι'', on aura d'abord,

$$\left.\begin{array}{l} x'^2 + y'^2 + z'^2 = a'^2, \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 = b'^2, \\ x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 = c'^2; \end{array}\right\} \quad (12)$$

ensuite, par le théorème démontré au n° 127,

$$\left.\begin{array}{l}(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2=a'^2b'^2\sin^2.\varepsilon\\(y''z'''-z''y''')^2+(z''x'''-x''z''')^2+(x''y'''-y''x''')^2=b'^2c'^2\sin^2.\varepsilon''\\(y'''z'-z'''y')^2+(z'''x'-x'''z')^2+(x'''y'-y'''x')^2=c'^2a'^2\sin^2.\varepsilon';\end{array}\right\}(13)$$

et d'après ce qui a été prouvé au n° 173,

$$x'y''z'''-x'z''y'''+z'x''y'''-y'x''z'''+y'z''x'''-z'y''x'''$$
$$=a'b'c'\sqrt{1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\varepsilon'-\cos^2\varepsilon''+2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon''}. \qquad (14)$$

Ces trois derniers groupes d'équations sont analogues à ceux (9, 10 et 11). En comparant alors la somme des équations (12) à la somme des équations (9) on obtient cette relation,

$$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2,$$

qui donne précisément lieu à l'énoncé du premier théorème. En comparant pareillement la somme des équations (13) à celles des équations (10), il vient

$$a'^2b'^2\sin^2\varepsilon+a'^2c'^2\sin^2\varepsilon'+b'^2c'^2\sin^2\varepsilon''=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2;$$

tel est le second théorème qu'il fallait démontrer.

Enfin, la comparaison de l'équation (14) avec celle (11), donne

$$a'^2b'^2c'^2(1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\varepsilon'-\cos^2\varepsilon''+2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'')=a^2b^2c^2,$$

et prouve par conséquent le troisième théorème.

Cette manière élégante et directe d'arriver à ces résultats est due à M. Gergonne, mais ils ont été remarqués pour la première fois par M. Livet, ancien répétiteur à l'Ecole Polytechnique. (*Voyez* le 13e cahier du Journal de cette école.)

Les surfaces du second degré sont douées de beaucoup d'autres propriétés très curieuses sur lesquelles il serait trop long de nous arrêter, et dont quelques-unes sont encore analogues à celles des courbes de ce degré. On ne pourra mieux faire que de consulter à cet égard les *Annales de Mathématiques* et la *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*.

Voici néanmoins les énoncés de plusieurs propositions sur lesquelles on fera bien de s'exercer.

1°. *Dans toute ligne du second ordre douée d'un centre, si l'on mène deux tangentes parallèles à une même droite fixe quelconque, et une troisième tangente variable, le produit des segmens des deux premières tangentes, compris depuis leurs points de contact jusqu'à la troisième, sera une quantité constante.*

2°. *Deux hyperboles équilatères telles, que les diamètres principaux de chacune sont les asymptotes de l'autre, se coupent toujours à angles droits.*

3°. *Dans tout hexagone inscrit à une section conique, les points de concours des directions des côtés opposés sont tous trois sur une même ligne droite.*

4°. *Dans tout hexagone circonscrit à une section conique, les diagonales qui joignent les sommets opposés se coupent toutes trois au même point.*

5°. *Trouver quelle surface décrit dans l'espace un point quelconque d'une droite mobile, dont trois autres points sont assujettis à rester constamment sur trois plans fixes.*

Nota. On trouve pour résultat une surface du second ordre dont le centre est à l'intersection des trois plans fixes. (*Voyez* les *Développemens de Géométrie*, par M. Dupin, p. 340.)

6°. *Quel est le lieu des centres de gravité des volumes de tous les tétraèdres qui ont un volume constant et un angle trièdre constant donnés?*

Nota. Le lieu cherché est une surface du troisième ordre dont les plans coordonnés sont les plans asymptotiques.

7°. *Le lieu des milieux des cordes menées à une section conique quelconque, par un même point quelconque de son plan, est une autre section conique.*

8°. *La somme algébrique des distances des trois sommets de la face hypoténusale d'un tétraèdre inscrit à une sphère, à un plan d'un grand cercle quelconque, est égale à la di-*

stance du sommet opposé du tétraèdre au plan du même grand cercle.

9°. *Le plan qui divise l'un des angles dièdres d'un tétraèdre en deux parties égales, partage l'arête opposée en deux segmens proportionnels aux aires des faces correspondantes de ce tétraèdre.*

10°. *La droite qui, partant du sommet d'un tétraèdre, fait des angles égaux avec les trois faces adjacentes, rencontre sa base en un point tel, qu'en le considérant comme le sommet commun de trois triangles ayant pour bases les trois côtés de cette base, les aires de ces triangles sont proportionnelles aux aires des faces correspondantes du tétraèdre.*

QUATRIÈME SECTION.

NOTIONS SUR L'APPLICATION DE L'ANALYSE TRANSCENDANTE A LA GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

Théorie générale des osculations.

Osculation des courbes planes.

178. Il ne s'est agi, dans le n° 52, que des droites tangentes aux courbes planes, c'est-à-dire que des sécantes dont les deux points d'intersection coïncident. Ce n'est pas, néanmoins, la seule manière d'envisager les tangentes : en effet, on peut les regarder comme le prolongement de l'élément de la courbe; ou, plus exactement, une droite est tangente à une courbe, lorsque, entre elle et cette courbe, il est impossible de mener, par le point commun, aucune autre droite. Par analogie, les géomètres ont comparé les courbes entre elles, et cherché à connaître les conditions analytiques auxquelles il fallait satisfaire pour qu'une courbe d'une espèce donnée s'approchât, dans un petit espace, le plus possible d'une autre courbe quelconque : ils ont même appliqué ces considérations aux surfaces courbes.

Afin de présenter la théorie des osculations sous le point de vue le plus général, et de suppléer par là à ce qui manque dans la plupart des livres élémentaires qui traitent du calcul différentiel, je vais donner le précis de celle que Lagrange a exposée d'une manière élégante et lumineuse dans sa *Théorie des fonctions analytiques :* ensuite j'en ferai, d'après Monge, l'application à la recherche des équations de certaines surfaces courbes. Je supposerai donc ici que le lecteur est imbu des principes du calcul différentiel.

Suivant le *Théorème de Taylor* (3e édit. du *Cal. différent. élém.* de M. Lacroix), si y est une fonction de x, ou, ce qui est de même, si l'équation d'une courbe quelconque est représentée par $y=f(x)$, et que l'abscisse x reçoive un accroisement quelconque h, l'ordonnée y variera en même temps d'une quantité k, dont la valeur sera donnée par la série

$$k = \frac{df(x)}{dx}h + \frac{d^2f(x)}{1.2.\,dx^2}h^2 + \frac{d^3f(x)}{1.2.3.\,dx^3}h^3 + \text{etc.}$$

$$= \frac{dy}{dh}\,h + \frac{d^2y}{1.2.\,dx^2}h^2 + \frac{d^3y}{1.2.3.\,dx^3}h^3 + \ldots,$$

et dans laquelle nous supposerons qu'aucun terme ne devienne infini. Mais en désignant, pour abréger, les coefficiens différentiels successifs, par p', p'', p''', on a

$$k = p'h + \frac{p''}{1.2}h^2 + \frac{p'''}{1.2.3}h^3 + \ldots.$$

Soit une autre courbe donnée par l'équation $y' = \mathrm{F}(x')$. Si x' reçoit le même accroissement h, y' deviendra en général $y' + k'$; ainsi, on aura

$$k' = q'h + \frac{q''}{2.2}h^2 + \frac{q'''}{1.2.3}h^3 + \ldots.$$

Maintenant, la condition d'un point commun aux deux courbes donne $y' = y$, ou $\mathrm{F}(x) = f(x)$, puisqu'alors

$x' = x$; et la distance Δ de ces deux lignes, mesurée sur l'ordonnée qui répond à l'abscisse $x + h$ est, en général,

$$\Delta = (p' - q')\,h + \frac{(p'' - q'')}{1.2}h^2 + \frac{(p''' - q''')}{1.2.3}h^3 + \ldots\ldots$$

Cette distance deviendra évidemment d'autant plus petite qu'il y aura plus de termes qui disparaîtront à l'origine de la série.

Considérons une troisième courbe dont l'équation soit $y'' = \varphi\,(x'')$, et qui passe par le point commun aux deux autres, auquel cas $y'' = y$. Alors, si D exprime la distance de celle-ci à la première, mesurée de même sur l'ordonnée répondante à l'abscisse $x + h$, on aura, comme ci-dessus,

$$D = (p' - r')\,h + \frac{(p'' - r'')}{1.2}h^2 + \ldots;$$

et si, dans la valeur générale de Δ, $p' - q' = 0$, on aura seulement

$$\Delta = (p'' - q'')\frac{h^2}{1.2} + (p''' - q''')\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Or, le rapport $\frac{\Delta}{D}$ devenant d'autant plus petit que h est moindre, il arrivera que, pour de certaines valeurs très petites de h, on aura $\Delta < D$; donc, tant que cette inégalité subsiste, c'est-à-dire tant que l'on n'a pas $p' - r' = 0$, la troisième courbe ne peut passer entre les deux premières: celles-ci se touchent donc au point commun. Le contact qui a lieu lorsque $F\,(x) = f(x)$, et $\frac{dF\,(x)}{dx} = \frac{df\,(x)}{dx}$, est dit *contact simple*, ou *du premier ordre*.

Quand les deux premiers termes de la série générale Δ disparaissent, sans que h soit nul, on a

$$\Delta = \frac{h^3}{1.2.3}(p''' - q''') + \ldots;$$

ainsi, par rapport à la troisième courbe, pour laquelle les deux premiers termes ne disparaissent pas de la série D, il s'ensuit de même que $\Delta < D$, pour des valeurs très petites de h. Cette troisième courbe ne peut donc passer entre les deux autres, dans le cas où l'on a à la fois $y' = y$, $q' = p'$, $q'' = p''$ ou $F(x) = f(x)$, $\frac{dF(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d^2F(x)}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$. Dans cette circonstance, les deux premières courbes forment un *contact du second ordre*, et il est remarquable alors que la courbe touchante ou *osculatrice* passe au-dessus et au-dessous de la courbe touchée; cela est une suite de ce que h^3 change de signe lorsqu'on met $-h$ au lieu de $+h$ (n° 62, *Calc. dif. élém.* L. C.).

En général, pour que deux courbes soient rapprochées l'une de l'autre, auprès de leur point commun, de manière à former un contact de l'ordre n, il faut égaler entre eux les n premiers termes des valeurs de k et k'.

179. Pour répandre plus de jour sur cette doctrine, passons aux applications.

D'abord, soit $y' = F(x') = Ax' + B$ l'équation de la droite touchante, dont la position sera déterminée par les deux constantes A, B. Comme au point de contact, on a, d'après ce qui précède,

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx},$$

il s'ensuit que l'équation de cette droite donne, en la différenciant,

$$\frac{dy'}{dx'} = A; \quad \text{donc } A = \frac{dy}{dx};$$

par conséquent les deux relations qui existent entre A et B sont

$$y = Ax + B, \qquad A = \frac{dy}{dx},$$

et fournissent

$$B = y - \frac{dy}{dx} x.$$

Ainsi, l'équation de la tangente à une courbe quelconque est

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x);$$

et puisque la normale est perpendiculaire à la tangente, on a, pour son équation,

$$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x).$$

Le rapport $\frac{dy}{dx}$ s'obtient en différenciant l'équation de la courbe à laquelle on doit mener une tangente, ce qui revient à la méthode élémentaire que nous avons exposée au n° 52.

Pour seconde application, comparons le cercle avec la courbe proposée $y = f(x)$, et, dans cette vue, prenons pour équation de sa circonférence

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = \gamma^2; \qquad (1)$$

en la différenciant, on obtient

$$(x' - \alpha) + (y' - \beta)\frac{dy'}{dx'} = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{dy'}{dx'} = q' = -\frac{x' - \alpha}{y' - \beta};$$

ainsi, à cause des relations $y' = y$, $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}$, on a

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2, \quad p' = -\frac{x - \alpha}{y - \beta},$$

d'où l'on tire

$$\alpha = x + \frac{\gamma p'}{\sqrt{1+p'^2}}, \quad \beta = y - \frac{\gamma}{\sqrt{1+p'^2}}.$$

Telles sont les coordonnées du centre du cercle; coordonnées qui seront entièrement déterminées si le point de contact et le rayon sont donnés, puisque $p' = \frac{dy}{dx}$ se tirera de l'équation de la courbe proposée. Mais si l'on attribue différentes valeurs au rayon, et que l'on élimine ce rayon entre ces deux dernières équations, l'on aura

$$\beta - y = -\frac{dx}{dy}(\alpha - x).$$

Celle-ci qui appartient évidemment à une droite dont les coordonnées sont α, β, est normale à la courbe proposée, et représente, par conséquent, le lieu de tous les cercles susceptibles de former un contact simple avec cette courbe.

Puisque l'équation générale du cercle renferme trois constantes, et que l'on en détermine seulement deux lors du contact du premier ordre, on peut supposer que le cercle satisfait aux trois conditions suivantes :

$$y' = y, \ \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

ou

$$y' = y, \quad q' = p', \qquad q'' = p''.$$

Dans cette hypothèse, l'équation précédente (1) donnera, après l'avoir différenciée deux fois de suite, et avoir changé x' en x et y' en y ;

$$(x - \alpha) + (y - \beta)\frac{dy}{dx} = 0, \qquad (2)$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \qquad (3)$$

Tirant de celles-ci les valeurs de $x - \alpha$ et $y - \beta$, pour

les substituer dans (1), on obtiendra définitivement

$$x - \alpha = \frac{p'(1+p'^2)}{p''}, \quad y - \beta = -\frac{1+p'^2}{p''},$$

$$\gamma = \frac{(1+p'^2)^{\frac{3}{2}}}{p''} = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y}.$$

De cette manière, le cercle cherché, que l'on nomme *cercle osculateur*, sera déterminé de grandeur et de position, et jouira par rapport à tous les cercles qui forment un contact simple, de la même propriété que la tangente à l'égard des sécantes. Le rayon γ du cercle osculateur s'appelle aussi *rayon de courbure*, parce qu'il est commode de mesurer la courbure d'une courbe par celle de ce cercle.

On voit, par cette théorie, qu'une courbe osculatrice ne peut être de l'ordre n, à moins qu'elle n'offre $n+1$ constantes dans son équation. Ainsi, par exemple, la parabole cubique $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ est susceptible d'avoir au plus un contact du troisième ordre, parce que les constantes a, b, c, d, que l'on nomme *élémens du contact*, sont au nombre de quatre.

Dans l'expression précédente du rayon de courbure, dx est supposé constant : or, comme la différentielle de l'arc s est $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$, il est clair que $ds^3 = (dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}$, par conséquent

$$\gamma = \frac{ds^3}{d\left(\frac{dy}{dx}\right)dx^2}.$$

Mais en prenant la différentielle de $\frac{dy}{dx}$, et faisant tout varier, ce qui établit l'hypothèse que x et y sont implicitement fonctions d'une troisième variable, on a cette expression symétrique,

$$\gamma = \frac{ds^3}{dxd^2y - dyd^2x} = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

Lorsque ds est considéré comme constant, on trouve, en différenciant $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ dans cette supposition,

$$d^2y = -\frac{dx}{dy}\,d^2x, \text{ ou } d^2x = -\frac{dy}{dx}\,d^2y;$$

partant,

$$\gamma = -\frac{dyds}{d^2x}, \qquad \gamma = \frac{dxds}{d^2y}.$$

Dans les applications, soit que l'on emploie l'une ou l'autre de ces trois formules, on parviendra toujours au même résultat.

180. La méthode qui vient de nous faire connaître le rayon de courbure, s'applique avec le même succès aux courbes rapportées à des coordonnées polaires. Voici, en peu de mots, comment il faut procéder pour obtenir, dans cette hypothèse, l'expression de ce rayon.

Soient r le rayon vecteur, et φ l'angle qu'il fait avec l'axe des x; on aura, n° 48,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Or, l'équation (1) du cercle osculateur (n° 179) devient, au point de contact,

$$(r\cos\varphi - \alpha)^2 + (r\sin\varphi - \beta)^2 = \gamma^2. \qquad (m)$$

Donc, si l'on différencie deux fois consécutives, par rapport à r et à φ, et en regardant $d\varphi$ comme constant, on aura ces deux équations

$$(r\cos\varphi - \alpha)\left(\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right) + (r\sin\varphi - \beta)\left(\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)^2 + (r\cos\varphi - \alpha)\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\cos\varphi - 2\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi - r\cos\varphi\right)$$

$$+\left(\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)^2 + (r\sin\varphi - \beta)\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\sin\varphi + 2\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right) = 0,$$

desquelles on tirera les valeurs de $(r \sin \varphi - \beta)$ et de $(r \cos \varphi - \alpha)$, que l'on substituera ensuite dans l'équation (m), et l'on trouvera définitivement, pour le rayon osculateur dans les courbes polaires,

$$\gamma = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right)} = \frac{(r^2 d\varphi^2 + dr^2)^{\frac{3}{2}}}{d\varphi^3 r^2 + 2dr^2 d\varphi - rd^2r d\varphi};$$

c'est à quoi M. Lacroix est parvenu par un autre procédé. (*Traité élém. du Calc. dif.*, n° 126.)

Puisque la grandeur et la position du rayon de courbure dépendent des valeurs des coordonnées du point de contact, on conçoit que le lieu géométrique de tous les centres des cercles osculateurs sont sur une certaine courbe dont l'équation en α et β doit s'obtenir en substituant dans celles (2) et (3) du n° précédent, les valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonction de x, déduites de l'équation de la courbe proposée, et ensuite en éliminant x entre ces deux résultats, afin d'en obtenir un troisième indépendant des valeurs particulières des coordonnées du point de contact. C'est cette courbe que l'on nomme *développée* : elle jouit de plusieurs propriétés remarquables; par exemple, elle est toujours rectifiable pour les courbes algébriques, parce que la longueur d'un de ses arcs est la différence de deux rayons de courbure correspondant aux extrémités de cet arc (*voyez* le *Traité cité* de M. Lacroix), et elle est touchée par tous ces rayons de courbure.

Les points de la développée peuvent encore être considérés comme les intersections de deux normales consécutives à la courbe proposée ou à la développante. Soit, par exemple, l'équation de l'ellipse,

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad (1)$$

rapportée à son centre et à ses axes principaux ; celle de la normale à cette courbe, passant par le centre α, β, du cercle osculateur, est, d'après le numéro précédent,

$$B^2x(\beta - y) = A^2y(\alpha - x),$$

ou

$$A^2\left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) = B^2\left(1 - \frac{\beta}{y}\right); \quad (2)$$

et l'on aura l'équation relative à la normale infiniment voisine de celle-ci, en différenciant (2) par rapport à x et y, puis mettant au lieu du rapport $\frac{dy}{dx}$ sa valeur déduite de l'équation (1) ; ce qui donnera,

$$\frac{x^3}{A^4\alpha} + \frac{y^3}{B^4\beta} = 0. \quad (3)$$

Il reste à éliminer x, y entre cette équation et celles (1, 2), pour avoir l'équation de la développée en α et β ; mais en égalant chaque membre de l'équation (2) à λ^2, on a

$$x = \frac{A^2\alpha}{A^2 - \lambda^2}, \; y = \frac{B^2\beta}{B^2 - \lambda^2},$$

et ces valeurs changent les équations (1, 3) en ces deux autres,

$$\frac{A^2\alpha^2}{(A^2 - \lambda^2)^2} + \frac{B^2\beta^2}{(B^2 - \lambda^2)^2} = 1, \quad (1')$$

$$\frac{A^2\alpha^2}{(A^2 - \lambda^2)^3} + \frac{B^2\beta^2}{(B^2 - \lambda^2)^3} = 0; \quad (3')$$

en sorte qu'il ne s'agit plus que d'éliminer λ^2 entre ces dernières, pour avoir l'équation cherchée. Dans ce but, soient, pour abréger, $A^2\alpha^2 = m^3$, $B^2\beta^2 = n^3$; les équations (1′, 3′) seront

$$\frac{m^3}{(A^2-\lambda^2)^2}+\frac{n^3}{(B^2-\lambda^2)^2}=1, \qquad (1'')$$

$$\frac{m^3}{(A^2-\lambda^2)^3}+\frac{n^3}{(B^2-\lambda^2)^3}=0; \qquad (3'')$$

et comme la seconde peut s'écrire ainsi :

$$\left(\frac{B^2-\lambda^2}{A^2-\lambda^2}\right)^3=-\frac{n^3}{m^3},$$

on en tire aisément, après avoir extrait la racine cubique, et chassé les dénominateurs,

$$\lambda^2=\frac{A^2n+B^2m}{m+n};$$

par suite

$$A^2-\lambda^2=\frac{m(A^2-B^2)}{m+n},\ B^2-\lambda^2=\frac{-n(A^2-B^2)}{m+n}.$$

Substituant ces valeurs dans (1″) et remplaçant m, n par les leurs, il vient enfin

$$\left(\frac{A\alpha}{A^2-B^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{B\beta}{A^2-B^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1; \quad (4)$$

c'est là l'équation de la développée de l'ellipse, qu'il fallait trouver, et à laquelle on parvient d'ailleurs plus aisément par une autre considération.

181. Actuellement, il importe de faire connaître comment on détermine l'équation de la courbe qui en touche une infinité d'autres d'une nature donnée, et assujetties à se succéder suivant une loi connue.

Pour bien fixer les idées à cet égard, concevons qu'un cercle variable de position se meuve dans son plan, de manière que le centre se trouve toujours sur une courbe dont l'équation soit $y=\varphi(x)$, φ étant le signe d'une fonction donnée. Celle du cercle étant $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$, les coordonnées α, β du centre seront liées entre elles par l'équation $\beta=\varphi(\alpha)$, en sorte que la précédente pourra être

écrite ainsi :

$$(x-\alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 = r^2. \quad (n)$$

Or, si l'abscisse α reçoit un accroissement infiniment petit $d\alpha$, le cercle, qui ne changera pas de grandeur, prendra une nouvelle position infiniment près de celle qu'il avait d'abord, et sa circonférence coupera la première en deux points dont les coordonnées x, y seront communes à ces deux lignes, et par conséquent ne varieront pas en passant d'un cercle à l'autre. Si l'on passe de la même manière de cette seconde position à une troisième, et ainsi de suite, le système de tous les points d'intersection que l'on obtiendra d'un même côté de la ligne des centres formera une courbe qui sera celle de contact cherchée. Pour en avoir l'équation, il faudra donc différencier (n) par rapport à α seulement, et égaler cette différentielle à zéro ; ensuite éliminer α entre ces deux équations, et le résultat de l'élimination offrira une relation entre x et y, indépendante de la position du centre de tous les cercles enveloppés.

Soit, en général, $V = f(x, y, \alpha) = 0$, l'équation de la courbe génératrice, et dans laquelle α est une constante arbitraire ; on aura ces deux-ci :

$$V = 0,$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0,$$

entre lesquelles on éliminera la constante dont il s'agit, pour déterminer l'équation de la courbe qui touche toutes celles que l'on obtient en attribuant à cette constante toutes les valeurs possibles dans l'équation $V = 0$.

Il est facile d'après cela, de reconnaître que l'équation (4) du numéro précédent, provenant de l'élimination de la constante arbitraire λ, entre (1′) et (3′), que l'on peut représenter respectivement par $V = 0$, $\frac{dV}{d\lambda} = 0$, est aussi l'enveloppe de toutes les ellipses résultantes de (1′).

182. Ce qui peut être abstrait dans cette théorie sera plus facile à saisir en passant aux applications. Supposons d'abord qu'il soit question de *déterminer la ligne touchant à la fois tous les cercles de même rayon, et décrits de tous les points d'une droite donnée sur un plan, comme centres.*

Soient

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \qquad (1)$$

l'équation de l'un de ces cercles, et

$$y'=Ax',$$

l'équation du lieu de leurs centres. Puisqu'on aura entre α et β la relation $\beta=A\alpha$, la première équation deviendra, en y substituant pour β sa valeur,

$$(x-\alpha)^2+(y-A\alpha)^2-r^2=V=0,$$

laquelle étant différenciée par rapport à α seulement, donnera

$$(x-\alpha)+(y-A\alpha)A=\frac{dV}{d\alpha}=0,$$

d'où

$$\alpha=\frac{x+Ay}{A^2+1}.$$

Mettant cette valeur dans V, on obtient

$$A^2x^2-2Axy+y^2=r^2(A^2+1);$$

et, extrayant la racine carrée de part et d'autre, on a pour les équations des deux tangentes cherchées,

$$y=Ax+r(A^2+1),$$
$$y=Ax-r(A^2+1).$$

Ces tangentes sont donc parallèles à la ligne des centres, ce qui est d'ailleurs de toute évidence.

Cherchons actuellement *quelle est la courbe qui touche à la fois tous les cercles* (1) *décrits du même rayon, mais*

dont les centres sont sur une même circonférence donnée par $x'^2 + y'^2 = \rho^2$.

Alors la relation entre α et β sera

$$\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2,$$

et l'équation (1) se changera en celle-ci :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \sqrt{\rho^2 - \alpha^2})^2 - r^2 = V = 0;$$

de là

$$- x \sqrt{\rho^2 - \alpha^2} + \alpha y = \frac{dV}{d\alpha} = 0,$$

et par suite

$$\alpha = \frac{x\rho}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \beta = \frac{y\rho}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Mettant ces valeurs dans (1), et faisant, pour simplifier, $x^2 + y^2 = z^2$, on aura

$$z^2 - 2\rho z + \rho^2 = r^2;$$

d'où l'on tire

$$z = \rho \pm r, \quad \text{et} \quad z^2 = (\rho \pm r)^2,$$

ou enfin

$$x^2 + y^2 = (\rho \pm r)^2;$$

c'est-à-dire que les deux courbes de contact cherchées sont des cercles dont le centre commun est à l'origine des axes, et dont les rayons sont $\rho + r$ et $\rho - r$. On reconnaît sans doute cette vérité indépendamment de tout ce calcul; mais il est utile, dans les premières applications d'une théorie, de choisir de préférence des exemples qui amènent à des résultats connus d'avance, afin d'être mieux pénétré de l'exactitude des opérations algébriques auxquelles cette théorie donne lieu. C'est par un procédé analogue, que M. Lacroix, dans son *Traité de calcul différentiel*, in-4°, a déterminé les équations des *roulettes* en général, et de la cycloïde en particulier.

Voici encore deux autres problèmes dont les solutions reposent sur la théorie précédente.

183. *Déterminer toutes les lignes qui retranchent des surfaces équivalentes d'un angle donné:*

[Fig. 96.] Prenons pour axes des x et des y les côtés mêmes de l'angle donné XAY, et supposons qu'une des droites cherchées soit RN, c'est-à-dire que l'espace triangulaire NAR soit équivalent à q^2. Comme l'équation de la droite RN est généralement

$$y = Mx + N, \qquad (1)$$

on aura AN, ou $x = -\frac{N}{M}$, et AR, ou $y = N$; et, à cause de $q^2 = \frac{AN \times AR}{2} \sin\varphi$, il est clair que $q^2 = -\frac{N^2}{2M} \sin\varphi$, d'où l'on tire

$$M = -\frac{N^2 \sin\varphi}{2q^2};$$

l'équation de cette droite devient donc

$$y = -\frac{N^2 \sin\varphi}{2q^2} x + N. \qquad (2)$$

Or, si une autre droite R'N' est infiniment voisine de celle-ci, et que l'espace AN'R' soit encore équivalent à q^2, les deux droites dont il s'agit auront à leur point M d'intersection les mêmes coordonnées; ainsi, dans l'équation (2), la seule quantité qui aura varié sera N : il suit donc de là que si l'on différencie cette équation dans cette hypothèse, la résultante donnera

$$N = \frac{q^2}{x \sin\varphi},$$

et, partant, on aura

$$M = -\frac{q^2}{2x^2 \sin\varphi};$$

l'équation (1) se changera donc en celle-ci:

$$y = -\frac{q^2}{2x^2 \sin\varphi} x + \frac{q^2}{x \sin\varphi};$$

par conséquent

$$xy = \frac{q^2}{2 \sin\varphi} \qquad (3)$$

est le lieu hyperbolique des points M d'intersection de deux droites consécutives quelconques NR, N'R', qui résolvent la question. Ces droites sont donc tangentes à cette courbe.

Maintenant, si l'on demandait de déterminer la position de la tangente qui correspond à la normale passant par le sommet A de l'angle donné, on s'y prendrait ainsi qu'il suit :

L'équation de la tangente à la courbe actuelle est

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x) = -\frac{y}{x}(x' - x),$$

ou bien

$$yx' + xy' = 2xy; \qquad (4)$$

et de là on tire

$$AN = 2x, \quad AR = 2y.$$

Pour déterminer l'équation de la normale passant par l'origine, il faut faire usage des formules du n° 46, relatives aux coordonnées obliques. De ces formules, et de l'équation (4) de la tangente, qui peut être écrite ainsi :

$$Ax' + By' = p,$$

on déduit

$$A = y, \quad B = x,$$

et

$$\alpha = \frac{A - B\cos(x, y)}{\sin^2(x, y)}, \quad \beta = \frac{B - A\cos(x, y)}{\sin^2(x, y)};$$

ainsi l'équation de la normale, qui est $y' = \frac{\beta}{\alpha} x'$, devient

$$y' = \frac{x - y \cos(x, y)}{y - x \cos(x, y)} x'.$$

Mais au point de contact, x' et y' se changent respectivement en x et y : cette dernière équation donne donc

$$x = y.$$

D'où il suit que lorsque la ligne RN est perpendiculaire à la droite normale passant par l'origine, on a.... $AN = AR = 2y$. Cette normale divise donc en deux parties égales l'angle donné. Mais l'équation (3) de la courbe fournit alors

$$y = \sqrt{\frac{q^2}{2 \sin \phi}};$$

donc

$$AN = AR = \sqrt{\frac{2q^2}{\sin \phi}};$$

donc la tangente cherchée est la base d'un triangle isoscèle.

Nous ne nous arrêterons pas à prouver que, dans ce cas, cette base est un *minimum*, parce que cela ne présente aucune difficulté.

184. *Déterminer l'équation d'une caustique par réflexion.*

Si d'un point lumineux situé dans le plan d'une courbe, partent une infinité de rayons de lumière, et que ceux qui frappent cette courbe soient réfléchis de manière que l'angle de réflexion soit égal à l'angle d'incidence, il existera une courbe qui sera touchée par tous ces rayons : telle est celle que l'on nomme *caustique par réflexion.*

Cela posé, soient XY les coordonnées rectangles d'un point lumineux ; l'équation d'un rayon de lumière sera

$$y - Y = a(x - X). \qquad (a)$$

Si ce rayon frappe, en un point $x'y'$, une courbe de l'équation

$$F(x', y') = 0, \qquad (F)$$

qui a pour différentielle

$$mdx' + ndy' = 0, \qquad (F')$$

il se réfléchira suivant une droite dont nous représenterons l'équation par

$$y - y' = a'(x - x'); \qquad (a')$$

et les deux lignes (a), (a') formant des angles égaux avec la normale à la courbe (F), on exprimera cette condition ainsi qu'il suit :

D'abord l'équation de la normale est (n° 149)

$$y - y' = \frac{n}{m}(x - x');$$

et l'angle θ qu'elle formera avec la ligne d'incidence (a), aura pour tangente, $\text{tang}\,\theta = \frac{n - am}{m + an}$: or, l'angle de réflexion étant égal à celui-ci, il est évident que les deux lignes (a), (a') formeront entre elles un angle 2θ, dont la tangente sera

$$\text{tang}\,2\theta = \frac{2(n - am)(m + an)}{(m + an)^2 - (n - am)^2};$$

mais parce que l'on a en outre

$$\text{tang}\,2\theta = \frac{a' - a}{1 + aa'},$$

il s'ensuit qu'en égalant ces deux valeurs, on obtient une équation de laquelle on tire, après l'avoir divisée par $a^2 + 1$,

$$a' = \frac{an^2 + 2mn - am^2}{m^2 - 2amn - n^2}.$$

Cette expression devient fonction du point incident $x'y'$ et du point lumineux XY donné, en y mettant pour a sa valeur $\frac{y' - Y}{x' - X}$; ainsi l'équation du rayon réfléchi, est

$$y - y' = \frac{an^2 + 2mn - am^2}{m^2 - 2amn - n^2}(x - x'). \qquad (a'')$$

Or, d'après ce qui précède, si l'on passe de ce rayon à celui qui en est infiniment proche, ces deux rayons auront, à leur point d'intersection, les mêmes coordonnées x, y, et les seules quantités qui auront varié seront x', y'. Supposons donc qu'on ait mis dans (a''), pour x' sa valeur tirée de l'équation (F), et qu'on ait éliminé la variable y' entre l'équation (a'') et sa différentielle, on aura l'équation demandée de la caustique par réflexion.

Celles des *caustiques par réfraction* s'obtiendraient par les mêmes principes.

Osculation des courbes à double courbure.

185. Nous avons déjà dit, au n° 143, qu'une courbe à double courbure appartient à la Géométrie des trois dimensions, et qu'elle est donnée, dans l'espace, par l'intersection de deux surfaces courbes connues, sur lesquelles elle se trouve à la fois. Soient donc

$$y = f(x), \qquad z = \mathrm{F}(x)$$

les équations des deux projections de cette courbe (n° 123) sur les plans coordonnés xy, xz; et supposons qu'une autre courbe soit donnée de même par

$$y' = \phi(x'), \qquad z' = \Phi(x').$$

Si l'on veut qu'elles aient toutes deux un point commun pour une même abscisse x, il faudra qu'en faisant $x' = x$, on ait en même temps $y' = y$ et $z' = z$. Or, pour un point répondant à l'abscisse $x + h$, les ordonnées y, z deviendront respectivement

$$y + k = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots,$$

$$z + l = z + \frac{dz}{dx}h + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots,$$

et les ordonnées y', z' se changeront en $y' + k'$; $z' + l'$;

de sorte que si, pour abréger, on fait

$$Y = (y + k) - (y' + k'), \quad \text{et } Z = (z + l) - (z' + l'),$$

la distance Δ entre les points des deux courbes, qui répondent à la même abscisse $x + h$ aura pour expression

$$\Delta = \sqrt{Y^2 + Z^2}.$$

Ainsi, pour une troisième courbe

$$y'' = \psi(x''), \quad z'' = \varphi(x''),$$

la distance D entre elle et la première courbe, répondant à l'abscisse $x + h$ dont il s'agit, serait

$$D = \sqrt{Y'^2 + Z'^2}.$$

Or, par des raisonnemens semblables à ceux du n° 178, on prouvera que, pour un contact du premier ordre, on doit avoir

$$y' = y, \; z' = z, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz'}{dx'} = \frac{dz}{dx};$$

parce qu'alors la troisième courbe, pour laquelle ces conditions ne se vérifieraient pas, ne pourrait passer entre les deux autres, puisque l'on aurait $\Delta < D$.

La seconde courbe formera donc avec la première, un contact du second ordre, si l'on a

$$y' = y, \; z' = z, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2z'}{dx'^2} = \frac{d^2z}{dx^2}$$

et ainsi de suite.

En général, soient x, y, z les coordonnées d'une courbe proposée, et x', y', z' celles d'une courbe donnée, pour laquelle on demande les conditions du contact d'un ordre déterminé avec la courbe proposée; si $\varphi(x', y', z') = u' = 0$, $\Phi(x', y', z') = U' = 0$ sont les deux équations de la courbe donnée (n° 143), on aura, pour un contact du premier ordre, les quatre équations

$$u = 0, \qquad U = 0,$$
$$du = 0, \qquad dU = 0,$$

u et U étant ce que deviennent respectivement u' et U' lorsqu'on y change $x'y'z'$ en xyz; et pour un contact du second ordre, on aura, de plus, les deux équations

$$d^2u = 0, \qquad d^2U = 0,$$

et ainsi de suite, en regardant, dans ces équations différentielles, y et z comme fonctions de x. On satisfera à ces équations par le moyen des constantes arbitraires qui entreront dans les fonctions données u' et U', et cela, de la même manière qu'au n° 179.

186. Il résulte de là que si les deux équations de la tangente à une courbe à double courbure, sont en général

$$y' = Ax' + B, \qquad z' = A'x' + B',$$

il faudra, en vertu des relations précédentes, relatives au point de contact, y écrire x, y, z au lieu de x', y', z', et l'on en tirera

$$\frac{dy}{dx} = A, \qquad \frac{dz}{dx} = A',$$

par suite

$$B = y - \frac{dy}{dx}x, \qquad B' = z - \frac{dz}{dx}x;$$

donc les équations de la tangente rapportée aux coordonnées x', y', z', sont

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x), \quad (1)$$

$$z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x); \quad (2)$$

ou à cause que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d.f(x)}{dx} = f'(x), \quad \frac{dz}{dx} = \frac{d.F(x)}{dx} = F'(x),$$

ces équations peuvent être écrites ainsi :

$$y' - f(x) = (x' - x) f'(x), \quad (1')$$
$$z' - F(x) = (x' - x) F'(x); \quad (2')$$

et comme elles représentent évidemment celles des tangentes aux courbes planes (n° 179) qui sont des projections de la courbe proposée, il s'ensuit que le problème de mener une tangente à une courbe à double courbure consiste à en mener une à chacune des deux projections de cette courbe; et en effet, ces deux dernières seront les projections de la tangente cherchée. Cette conséquence est une nouvelle preuve de l'exactitude du procédé employé au n° 171, pour déterminer le rapport entre un angle et sa projection.

La position du plan normal, c'est-à-dire du plan mené par le point de contact, perpendiculairement à la tangente, est facile à trouver; car, en vertu des équations précédentes, et de ce qui a été dit au n° 124, l'équation différentielle de ce plan est

$$(x' - x)\frac{dx}{dz} + (y' - y)\frac{dy}{dz} + (z' - z) = 0.$$

Les équations (1') et (2') ne renferment que la variable x: si donc l'on éliminait cette variable entre elles, on aurait une relation entre x', y', z', indépendante des coordonnées du point de contact, et qui serait évidemment l'équation de la surface formée par toutes les tangentes à la courbe donnée dans l'espace. Il suit de là que, si cette courbe était plane, la surface dont il s'agit serait un plan; mais, dans le cas contraire, cette même surface serait une surface développable dont la courbe proposée formerait l'arête de rebroussement. (*Voyez* à ce sujet la *Géométrie descriptive* de Monge, ou celle de M. Lacroix.)

187. C'est par les mêmes principes que l'on détermine le cercle osculateur d'une courbe à double courbure; voici à cet égard, comment l'on procède de la manière la plus simple.

En considérant le cercle cherché comme un des grands cercles de la sphère

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 + (z' - \gamma)^2 = \delta^2,$$

son plan, rapporté aux mêmes coordonnées, et passant par le point $\alpha\beta\gamma$, a généralement pour équation

$$(x' - \alpha) + M(y' - \beta) + N(z' - \gamma) = 0;$$

et si l'on change ici $x'y'z'$ en xyz, pour exprimer que le cercle cherché a un point commun avec la courbe à double courbure proposée, on aura, en prenant les équations différentielles du premier et du second ordre,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \delta^2,$$
$$(x - \alpha) + M(y - \beta) + N(z - \gamma) = 0,$$
$$(x - \alpha) + (y - \beta)\frac{dy}{dx} + (z - \gamma)\frac{dz}{dx} = 0,$$
$$1 + M\frac{dy}{dx} + N\frac{dz}{dx} = 0,$$
$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2} + (y - \beta)\frac{d^2y}{dx^2} + (z - \gamma)\frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$
$$M\frac{d^2y}{dx^2} + N\frac{d^2z}{dx^2} = 0.$$

De ces six équations, les quatre premières renferment seulement les conditions nécessaires pour que le cercle dont il s'agit forme un contact du premier ordre avec une courbe à double courbure, dont x, y, z sont les coordonnées, et pour laquelle $y = f(x)$, $z = F(x)$; mais en prenant toutes ces équations, elles fournissent les conditions du contact du second ordre; et, pour lors, le cercle, qui se trouve entièrement déterminé de grandeur et de position est, aussi bien que son plan, osculateur de la courbe. Son rayon, situé dans le plan de deux élémens consécutifs de cette courbe, est le plus court de tous les rayons de courbure au même point, situés hors du plan dont il s'agit.

Dans ce cas, si, pour abréger, l'on fait

$$\frac{dy}{dx} = p', \ \frac{dz}{dx} = q', \ \frac{d^2y}{dx^2} = p'', \ \frac{d^2z}{dx^2} = q'',$$

et

$$R = \sqrt{[(Np' - Mq')^2 + (N - q')^2 + (M - p')^2]},$$

les trois premières équations précédentes donneront ces valeurs

$$x - \alpha = \frac{(Np' - Mq')\delta}{R}, \ y - \beta = -\frac{(N - q')\delta}{R}, \ z - \gamma = \frac{(M - p')\delta}{R},$$

au moyen desquelles la cinquième équation fournira

$$\delta = \frac{(1 + p'^2 + q'^2)R}{(N - q')p'' - (M - p')q''}.$$

Enfin, la quatrième et la sixième équation donneront

$$M = \frac{q''}{q'p'' - p'q''}, \quad N = -\frac{p''}{q'p'' - p'q''},$$

et, de là les expressions ci-dessus se changeront en celles-ci, après les réductions,

$$\delta = -\frac{(1 + p'^2 + q'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{[p''^2 + q''^2 + (p'q'' - q'p'')^2]}},$$

$$\alpha = x - \frac{(1 + p'^2 + q'^2)(p'p'' + q'q'')}{p''^2 + q''^2 + (p'q'' - q'p'')^2},$$

$$\beta = y + \frac{(1 + p'^2 + q'^2)[p'' - p'(p'p'' + q'q'')]}{p''^2 + q''^2 + (p'q'' - q'p'')^2},$$

$$\gamma = z + \frac{(1 + p'^2 + q'^2)[q'' - q'(p'p'' + q'q'')]}{p''^2 + q''^2 + (p'q'' - q'p'')^2}.$$

Ce sont ces formules mêmes que Monge a obtenues par une autre méthode. (*Voy.* sa *Géom. analyt.*, p. 366.)

Leur défaut de symétrie tient à ce que x a été prise pour variable indépendante, mais en faisant varier dx et posant, pour abréger, $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, on obtient, par

exemple,

$$\delta = \frac{ds^3}{\sqrt{(dxd^2y - dyd^2x)^2 + (dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2}},$$

expression qui revient à celle-ci :

$$\delta = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}},$$

comme l'a fait voir M. Lacroix, et qui est celle du rayon de courbure absolu. Au surplus, voici, d'après la *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, tome III, p. 36, comment on trouve cette expression par la méthode de Léibnitz.

Soient a, b, c les cosinus des angles qu'un élément de la courbe au point xyz, fait avec les axes rectangles des coordonnées; $a + da$, $b + db$, $c + dc$ seront les cosinus des angles que le second élément au même point fera avec les mêmes axes; et l'angle de ces deux élémens consécutifs ou l'*angle de contingence* étant désigné par φ, on aura (n° 131) ces relations

$$\cos\varphi = a(a + da) + b(b + db) + c(c + dc),$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$
$$(a + da)^2 + (b + db)^2 + (c + dc)^2 = 1;$$

les deux dernières donnent

$$-2(ada + bdb + cdc) = da^2 + db^2 + dc^2,$$

et de la première on tire, en réduisant et négligeant les infiniment petits du 4e ordre,

$$\sin^2\varphi = -2(ada + bdb + cdc) - (ada + bdb + cdc)^2$$
$$= da^2 + db^2 + dc^2.$$

Or, l'élément ds de la courbe ayant φ pour amplitude et δ pour rayon, on a nécessairement $\delta = \frac{ds}{\varphi}$; de plus, à

cause de $a = \frac{dx}{ds}$, $b = \frac{dy}{ds}$, $c = \frac{dz}{ds}$, et de l'extrême petitesse de φ, on a, comme il est dit ci-dessus,

$$\rho = \frac{ds}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}}.$$

La courbe des centres de tous les cercles osculateurs n'est pas une développée, comme dans les courbes planes. Il y aurait encore bien des choses importantes à dire sur le sujet actuel; mais pour ne pas sortir des bornes d'un ouvrage élémentaire, nous renverrons au *Calc. différent. et intégr.* de M. Lacroix, tom. I.

Osculation des surfaces courbes.

188. Une surface étant donnée par une seule équation entre trois variables, une d'elles est fonction des deux autres, et celles-ci sont indépendantes entre elles. Ainsi, en représentant par

$$z = f(x, y), \qquad z' = \mathrm{F}(x', y'),$$

les symboles des équations de deux surfaces qui passent par le même point, on aura, en changeant x en $x + h$, et y en $y + k$.

$$z + l = z + \left(\frac{dz}{dx}\right)h + \left(\frac{dz}{dy}\right)k$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)h^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)hk + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)k^2\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et

$$z' + l' = z' + \left(\frac{dz'}{dx'}\right)h + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)k$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)h^2 + 2\left(\frac{d^2z'}{dx'dy'}\right)hk + \left(\frac{d^2z'}{dy'^2}\right)k^2\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

séries que nous représenterons plus simplement par

$$z + l = z + ph + qk,$$
$$+ \tfrac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et

$$z' + l' = z' + \mathrm{P}h + \mathrm{Q}k,$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\mathrm{R}h^2 + 2\mathrm{S}hk + \mathrm{T}k^2)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et dans lesquelles nous supposerons qu'aucun terme n'est infini. Or, au point commun, on a $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$; et la distance des deux surfaces, mesurée sur l'ordonnée qui répond à $x + h$, et $y + k$, est

$$\Delta = (\mathrm{P} - p)h + (\mathrm{Q} - q)k$$
$$+ \tfrac{1}{2}[(\mathrm{R} - r)h^2 + 2(\mathrm{S} - s)hk + (\mathrm{T} - t)k^2]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il faut donc, d'après ce qui précède, que, pour un contact du premier ordre, on ait $\mathrm{P} - p = 0$, $\mathrm{Q} - q = 0$, ou, ce qui est de même,

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = z,\ \left(\frac{dz'}{dx'}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right),\ \left(\frac{dz'}{dy'}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right);$$

car une troisième surface qui ne remplirait pas ces conditions, ne pourrait passer entre les deux autres, du moins tant que les termes du premier ordre seront plus grands que ceux des ordres supérieurs; et c'est ce qui arrivera en prenant h et k assez petits pour cela.

Quant au contact du second ordre, il aura lieu si l'on a de plus $\mathrm{R} - r = 0$, $\mathrm{S} - s = 0$, $\mathrm{T} - t = 0$; et ainsi de suite pour les contacts des ordres plus élevés.

Afin de nous arrêter au cas particulier que nous avons déjà traité par une autre voie, nous supposerons que la surface touchante est un plan; alors l'équation $z' = \mathrm{F}(x', y')$ prendra cette forme,

$$z' = \mathrm{A}x' + \mathrm{B}y' + \mathrm{D};$$

et, à cause des équations de condition précédentes, on aura, au point de contact,

$$z = Ax + By + D;$$

puis, en différenciant successivement par rapport à x et y, on trouvera

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = A, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = B;$$

de là

$$D = z - \left(\frac{dz}{dx}\right)x - \left(\frac{dz}{dy}\right)y;$$

l'équation du plan tangent à une surface courbe quelconque est donc

$$z' - z = \left(\frac{dz}{dx}\right)(x' - x) + \left(\frac{dz}{dy}\right)(y' - y)$$
$$= p(x' - x) + q(y' - y),$$

x, y, z étant les coordonnées du point de contact, et p, q des coefficiens aux différentielles partielles.

Maintenant, il est très aisé de déterminer les équations de la normale à la surface proposée, c'est-à-dire de la perpendiculaire au plan tangent: en effet, il résulte du n° 124, qu'elles sont

$$x' - x + p(z' - z) = 0, \quad y' - y + q(z' - z) = 0. \quad \text{(N)}$$

189. Appliquons d'abord cette théorie à la recherche du plan tangent aux deux cônes droits

$$(1) \qquad (ax + by + cz)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\cos^2 r,$$

$$(2) \qquad z^2 \sin^2 r'' = (x^2 + y^2)\cos^2 r'',$$

traités au n° 145. De la seconde équation l'on tire

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{z}\cot^2 r'', \quad \frac{dz}{dy} = \frac{y}{z}\cot^2 r'';$$

substituant ces valeurs dans l'équation générale du plan tangent, savoir :

$$z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x) + \frac{dz}{dy}(y' - y),$$

et réduisant, il vient

$$(3) \qquad zz' \sin^2 r'' = (xx' + yy') \cos^2 r'';$$

x', y', z' étant les coordonnées courantes et x, y, z désignant les coordonnées du point de contact.

L'équation du plan tangent au cône (1) se trouve par un calcul semblable, et est, toute réduction faite,

$$(4) \quad (xx' + yy' + zz') \cos^2 r = (ax' + by' + cz')(ax + by + cz).$$

Pour avoir facilement celle qui convient à la fois aux deux cônes proposés, l'on remarquera que la perpendiculaire abaissée sur le plan tangent (3), du centre de la base du cône r, dont les coordonnées rectangles sont a, b, c, a pour expression $\sin r$; ainsi, en vertu du n° 124, l'on a

$$\sin r = \frac{-(ax + by) \cos^2 r'' + cz \sin^2 r''}{\sqrt{(x^2 + y^2) \cos^4 r'' + z^2 \sin^4 r''}},$$

ou plus simplement, à cause de la relation (2),

$$\sin r = \frac{-(ax + by) \cos^2 r'' + cz \sin^2 r''}{z \sin r''};$$

et enfin, comme au n° 153,

$$(ax + by) \cos^2 r'' = z(c \sin^2 r'' - \sin r \sin r'').$$

Passons maintenant à la solution du problème suivant, que nous avons déjà résolu en deux dimensions.

Étant données dans l'espace la position d'un point lumineux et la direction d'un des rayons qui en émanent, et qui viennent frapper une surface connue, déterminer l'équation du rayon réfléchi.

Non-seulement comme nous l'avons déja dit, l'angle d'incidence est toujours égal à l'angle de réflexion; mais l'ex-

périence prouve, en outre, que ces deux angles sont dans le plan qui passe par la normale au point d'incidence.

Cela posé, soient X, Y, Z les coordonnées rectangles du point lumineux; les équations des projections d'un rayon de lumière seront

$$x - X = M(z - Z), \quad y - Y = N(z - Z);$$

mais pour rendre les calculs plus symétriques, nous donnerons à ces équations, la forme suivante:

$$a(z - Z) = c(x - X), \quad b(z - Z) = c(y - Y); \quad (a)$$

et comme la surface réfléchissante est connue, nous représenterons son équation par

$$F(x', y', z') = 0, \quad mdx' + ndy' + rdz' = 0. \quad (F)$$

Or, le rayon incident dont il s'agit, étant réfléchi suivant une droite partant du point $x'y'z'$ de cette surface, ses équations seront, en général,

$$a'(z - z') = c'(x - x'), \quad b'(z - z') = c'(y - y'). \quad (a')$$

Les deux lignes (a), (a') formant des angles égaux avec la normale à la surface, le cosinus de l'angle d'incidence sera égal au cosinus de l'angle de réflexion; ainsi, en vertu du n° 120, cette condition sera exprimée par l'équation

$$\frac{am + bn + cr}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a'm + b'n + c'r}{(a'^2 + b'^2 + c'^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (b)$$

Il reste à écrire analytiquement que le rayon incident (a), le rayon réfléchi (a') et la normale, sont dans un même plan. Pour cet effet, soit

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0,$$

l'équation de ce plan; celles des projections de la normale seront, à cause de l'équation différentielle (F) de la surface réfléchissante,

$$m(z - z') = r(x - x'), \quad n(z - z') = r(y - y'); \quad (N)$$

et la condition du n° 126, qui exprime qu'une droite est parallèle à un plan, fournira ces deux équations,

$$Aa + Bb + Cc = 0,$$
$$Am + Bn + Cr = 0.$$

Si donc l'on fait usage des valeurs de A et B, déduites de ces dernières équations, l'on aura, pour équation du plan passant par la normale et le rayon incident,

$$(cn-br)(x-x')+(ar-cm)(y-y')+(bm-an)(z-z')=0;$$

et si l'on met ici, pour $x-x'$ et $y-y'$, leurs valeurs fournies par les équations (a'), la condition cherchée sera

$$a'(cn-br)+b'(ar-cm)+c'(bm-an)=0; \qquad (c)$$

alors des équations (b), (c), l'on tirera

$$\frac{a'}{c'}=\frac{mr(a^2+b^2+c^2)+(cn-br)(bm-an)\pm(ar-cm)(am+bn+cr)}{r^2(a^2+b^2+c^2)-(cn-br)^2-(ar-cm)^2},$$

$$\frac{b'}{c'}=\frac{nr(a^2+b^2+c^2)+(ar-cm)(bm-an)\pm(br-cn)(am+bn+cr)}{r^2(a^2+b^2+c^2)-(cn-br)^2-(ar-cm)^2},$$

c'est-à-dire, à cause du double signe,

$$\frac{a'}{c'}=\frac{a}{c}, \qquad \frac{b'}{c'}=\frac{b}{c},$$

ou

$$\left.\begin{aligned}\frac{a'}{c'}&=\frac{2(am+bn+cr)\,m-a(m^2+n^2+r^2)}{2(am+bn+cr)r-c(m^2+n^2+r^2)},\\ \frac{b'}{c'}&=\frac{2(am+bn+cr)n-b(m^2+n^2+r^2)}{2(am+bn+cr)r-c(m^2+n^2+r^2)}.\end{aligned}\right\}(d)$$

Dans le premier cas, les valeurs de $\frac{a'}{c'}$ et $\frac{b'}{c'}$ se rapportent au rayon incident; et, dans le second cas, elles appartiennent au rayon réfléchi. La position de ce dernier sera donc connue si celle du rayon incident est donnée; et pour qu'elle ne dépende que des coordonnées x', y', z' et X, Y, Z, il n'y aura qu'à mettre, dans les formules (d), au lieu de $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, leurs valeurs respectives $\frac{x'-X}{z'-Z}$, $\frac{y'-Y}{z'-Z}$.

Supposons à présent que tous les rayons incidens soient parallèles à l'axe d'un paraboloïde de révolution de l'équation

$$z'^2 + y'^2 = ux',$$

u étant le paramètre; et cherchons, en vertu de cette hypothèse, les équations des rayons réfléchis. Dans cette circonstance, on aura évidemment $a = \infty$, et pour lors les formules (d) se réduiront à

$$\frac{a'}{c'} = \frac{m^2 - (n^2 + r^2)}{2mr}, \quad \frac{b'}{c'} = \frac{n}{r};$$

les équations (a') prendront donc cette forme

$$\left.\begin{aligned} z - z' &= \frac{2mr}{m^2 - (n^2 + r^2)}(x - x'), \\ z - z' &= \frac{r}{n}(y - y'). \end{aligned}\right\} \quad (a'')$$

En second lieu, l'équation différentielle du paraboloïde étant

$$ux' - 2y'dy' - 2z'dz' = 0,$$

on en tire

$$m = u, \; n = -2y', \; r = -2z';$$

et si, dans (a''), on fait $z = 0$, pour trouver, sur le plan des xy, les coordonnées du point où les rayons réfléchis rencontrent ce plan, on aura

$$x = \frac{u}{4}, \qquad y = 0;$$

c'est-à-dire que, *si la surface concave d'un paraboloïde de révolution est frappée par des rayons parallèles à son axe, tous les rayons réfléchis se réuniront au foyer.* (N° 162. L. C.)

Les formules ci-dessus mettraient aussi en évidence cette propriété, que *si, dans un ellipsoïde de révolution les rayons*

incidens partent d'un foyer, tous les rayons réfléchis se réuniront à l'autre foyer.

Un des plus beaux Mémoires qui aient été publiés sur la Géométrie analytique appliquée à l'Optique, est celui de Malus, à qui l'on doit des découvertes très importantes sur la lumière. Ce Mémoire, dont ce qui précède est extrait en partie, se trouve dans le 14e cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*

190. Pour appliquer encore la doctrine actuelle à la recherche des contacts, déterminons les coordonnées α, β, γ du centre de la sphère touchante, dont le rayon est δ, et qui est supposé former un contact simple. Son équation étant

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2=\delta^2,$$

on aura, en changeant respectivement x', y', z' en x, y, z, et en différenciant successivement par rapport à x et y,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\delta^2, \quad (1)$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=p=-\frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \ (2); \quad \left(\frac{dz}{dy}\right)=q=-\frac{y-\beta}{z-\gamma}. \ (3)$$

Voilà donc trois équations entre $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$; ainsi

$$\alpha=x+\frac{\delta p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\beta=y+\frac{\delta q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\gamma=z-\frac{\delta}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Dans ces valeurs, le rayon de la sphère tangente est arbitraire; et si on l'élimine des deux premieres, on aura ces deux équations :

$$\alpha-x+p(\gamma-z)=0, \quad \beta-y+q(\gamma-z)=0,$$

qui sont les mêmes que celles de la normale à la surface proposée. Concluons de là que les sphères touchantes ont toutes leur centre sur la normale menée par le point de contact.

Les équations (1), (2), (3) faisant seulement connaître trois des constantes α, β, γ, δ, il serait nécessaire, pour que la sphère proposée devînt osculatrice, que le troisième terme de la valeur de Δ (n° 188) fût nul, auquel cas on aurait $R - r = 0$, $S - s = 0$, $T - t = 0$, ou

$$\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2z'}{dx'dy'}\right) = \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right), \left(\frac{d^2z'}{dy'^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right);$$

mais parce qu'il ne reste qu'une constante arbitraire à déterminer, on ne pourra satisfaire en particulier à ces trois dernières équations; il est donc impossible de trouver, en général, une sphère osculatrice d'une surface, comme on trouve le cercle osculateur d'une courbe. Cependant, si, au lieu d'égaler séparément à zéro les termes du second ordre, comme nous venons de le faire, on suppose au contraire que leur ensemble est nul, on aura cette seule équation

$$(R - r)\,h^2 + 2\,(S - s)\,hk + (T - t)\,k^2 = 0,$$

ou

$$(R - r) \quad + 2\,(S - s)\frac{dy}{dx} + (T - t)\frac{dy^2}{dx^2} = 0;$$

laquelle, à cause de

$$R = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = -\frac{1 + P^2}{z - \gamma},$$

$$S = \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = -\frac{PQ}{z - \gamma},$$

$$T = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = -\frac{1 + Q^2}{z - \gamma},$$

deviendra, en y changeant d'ailleurs P en p, et Q en q,

$$\frac{d^2y^2}{dx^2}\left(\frac{1+q^2}{z-\gamma} + t\right) + 2\frac{dy}{dz}\left(\frac{pq}{z-\gamma} + s\right) + \frac{1+p^2}{z-\gamma} + r = 0;$$

d'où l'on tire

$$z - \gamma = -\frac{1 + p^2 + 2pq\frac{dy}{dx} + (1 + q^2)\frac{dy^2}{dx^2}}{r + 2s\frac{dy}{dx} + t\frac{dy^2}{dx^2}} = \mathrm{M}. \quad (4)$$

Mais par ce qu'on a trouvé précédemment.....

$\gamma = z - \frac{\delta}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$, il s'ensuit que le rayon

$$\delta = \mathrm{M}\sqrt{1 + p^2 + q^2}. \quad (5)$$

Dans cette circonstance, cette valeur de δ est celle du rayon de la sphère osculatrice d'une section quelconque faite dans la surface proposée suivant la normale à cette surface, et dont la projection de la direction, sur le plan xy, est déterminée par le rapport $\frac{dy}{dx}$. Or, la valeur de ce rapport étant arbitraire, on peut chercher celle qui rend le rayon de courbure δ un *maximum* ou un *minimum*. Pour cet effet, il n'y a qu'à égaler à zéro le coefficient différentiel de δ, c'est-à-dire faire $\frac{d\delta}{d\left(\frac{dy}{dx}\right)} = 0$, ou $\frac{d\mathrm{M}}{d\left(\frac{dy}{dx}\right)} = 0$, puisque dans l'expression de δ, le facteur $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ ne renferme point la quantité $\frac{dy}{dx}$. Mais l'équation (4) pouvant être écrite ainsi :

$$\mathrm{M}\left(r + 2s\frac{dy}{dx} + t\frac{dy^2}{dx^2}\right)$$

$$+ 1 + p^2 + 2pq\frac{dy}{dx} + (1 + q^2)\frac{dy^2}{dx^2} = 0, \quad (6)$$

on trouvera en la différenciant par rapport à $\frac{dy}{dx}$, et en fai-

sant $\dfrac{dM}{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)} = 0$, une équation de laquelle on tirera

$$M = -\frac{pq + (1+q^2)\dfrac{dy}{dx}}{s + t\dfrac{dy}{dx}}, \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{pq + Ms}{1 + q^2 + Mt}.$$

Or, en vertu de cette seconde valeur, l'équation (6) deviendra, après avoir ôté le facteur commun qui naîtra de cette substitution,

$$\left.\begin{array}{r} M^2(rt - s^2) + M[(1+p^2)r - 2pqs + (1+p^2)t] \\ + 1 + p^2 + q^2 \end{array}\right\} = 0. \quad (7)$$

Si l'on met en outre, dans la même équation (6), au lieu de M sa valeur précédente, on trouvera, après avoir ordonné,

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{dy^2}{dx^2}[(1+q^2)s - pqt] + \dfrac{dy}{dx}[(1+q^2)r - (1+p^2)t] \\ -(1+p^2)s + pqr \end{array}\right\} = 0. \quad (8)$$

Concluons de là que puisque $\dfrac{dy}{dx}$, qui exprime la tangente trigonométrique de l'angle formé par l'axe des x et la tangente à la courbe de projection de la section faite dans la sphère, est donnée par une équation du second degré, il y a toujours deux directions différentes suivant lesquelles se fait l'osculation, l'une qui répond à une ligne de plus grande courbure, et l'autre à une ligne de moindre courbure. Mais la position du plan des xy étant arbitraire, on peut la prendre telle, que l'équation (8) des lignes de courbure se simplifie de manière à laisser découvrir aisément la relation qu'ont entre elles les deux valeurs de $\dfrac{dy}{dx}$. Par exemple, en faisant coïncider ce plan avec celui qui touche la surface, et en plaçant l'origine des axes rectangles au point de contact,

on a nécessairement $x = 0, y = 0, z = 0$, et $p = 0, q = 0$; puisqu'alors la normale donnée par les formules (M) du n° 188 se confond avec l'axe des z. Cette hypothèse réduit, en effet, l'équation (8) à

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{r-t}{s}\right) - 1 = 0; \qquad (9)$$

dans la même circonstance, on a, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et

$$\gamma = \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{r + 2s\frac{dy}{dx} + t\frac{dy^2}{dx^2}}, \qquad \delta = -\gamma.$$

Or, si l'on représente par m et m' les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ que fournit l'équation (9), le dernier terme sera, comme on sait, égal au produit de ces deux valeurs; ainsi donc

$$mm' + 1 = 0.$$

Donc, les projections des deux directions cherchées sont, sur le plan des xy, perpendiculaires entre elles; donc, les lignes de plus grande et de moindre courbure d'une surface quelconque sont à angles droits.

Maintenant, si l'on prend pour axe des x l'une des directions dont il s'agit, on aura $m = 0$; et pour l'autre direction qui représentera l'axe des y, la valeur de m' sera infinie. Dans ce cas $s = 0$, comme cela est manifeste d'après l'équation (9), qui peut être écrite de ces deux manières:

$$m^2 s + m(r - t) - s = 0,$$

$$s + \frac{r-t}{m} - \frac{s}{m^2} = 0.$$

Il résulte de là que, pour une section faisant un angle quelconque V avec le plan des xz, on aura, à cause de tang $V = m$ et de $s = 0$,

$$\gamma = \frac{1 + \tang^2 V}{r + t \tang^2 V} = -\delta;$$

mais, $\tang^2 V = \frac{\sin^2 V}{\cos^2 V}$; donc

$$\delta = -\frac{1}{r \cos^2 V + t \sin^2 V}.$$

Pour faire dépendre explicitement ce résultat, du plus grand et du plus petit rayon de courbure, soient ρ' le premier et ρ'' le second; pour lors la formule (7), dans laquelle il faudra faire $p = q = s = 0$, donnera

$$M = \frac{-(r+t) \pm (t-r)}{2rt},$$

et l'équation (5) fournira

$$\rho' = -\frac{1}{r}, \quad \text{et } \rho'' = -\frac{1}{t};$$

la valeur ci-dessus de δ deviendra donc

$$\delta = \frac{\rho'\rho''}{\rho'' \cos^2 V + \rho' \sin^2 V}.$$

En exposant la Théorie analytique du Sphéroïde terrestre dans notre *Traité de Géodésie*, tome I, p. 287, nous sommes parvenu, par une autre voie, à cette expression du rayon de courbure; mais la méthode de calcul précédente a toute la généralité désirable.

Nous observerons encore que l'équation (8) se présente souvent sous une forme très simple, qu'il est très utile de connaître. En effet, puisque la différentielle complète de z est $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy = p dx + q dy$, et que l'on a de même $dp = r dx + s dy$, $dq = s dx + t dy$, les valeurs de r et de t, prises dans ces formules, et introduites dans l'équation (8), feront disparaître s; de sorte que l'on aura

$$dp(dy + qdz) = dq(dx + pdz). \qquad (8')$$

Voyez, pour le complément de cette théorie, le *Traité de Calc. différent.* de M. Lacroix, tom. I, et l'*Applicat. de l'Anal. à la Géom.* de Monge, p. 108.

191. Afin de généraliser le procédé du n° 181, cherchons l'équation de la surface qui enveloppe à la fois une infinité d'autres surfaces; et, dans cette vue, supposons, pour plus de simplicité, qu'il s'agisse de trouver l'*enveloppe* d'une suite de sphères décrites du même rayon, et dont les centres sont situés sur une courbe tracée dans le plan xy.

Si α, β sont les coordonnées des points de cette courbe, on aura, pour son équation,

$$\beta = f(\alpha);$$

et celle de la surface de toutes les sphères que l'on considère, sera

$$(x - \alpha)^2 + (y - f[\alpha])^2 + z^2 = r^2,$$

r dénotant le rayon.

Cela posé, si α varie d'une quantité infiniment petite $d\alpha$, la nouvelle abscisse $\alpha + d\alpha$ sera celle du centre de la sphère qui, par sa position, différera infiniment peu de la première; alors ces deux sphères se couperont suivant un cercle qui appartiendra en même temps à l'enveloppe cherchée, et dont les coordonnées de ses points ne varieront pas en passant de la première à la seconde sphère. Donc, si l'on différencie l'équation précédente par rapport à α seulement, celle que l'on obtiendra appartiendra à la courbe de contact dont il s'agit. Les deux équations de cette courbe seront donc

$$(x - \alpha)^2 + (y - f[\alpha])^2 + z^2 = r^2,$$

et

$$(x - \alpha) + (y - f[\alpha]) \frac{d.f(\alpha)}{d\alpha} = 0.$$

Soit, en général, $U = 0$ l'équation des surfaces enve-

loppées, α étant une constante ou un *paramètre* qui concourt à leur génération; les équations de la courbe de contact de l'enveloppe avec les deux enveloppées consécutives seront

$$U = 0, \qquad (A)$$

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0; \qquad (B)$$

donc, si on élimine entre elles le paramètre α qui particularise la courbe de contact, l'équation résultante en x, y, z, et en constantes indépendantes de α, sera celle de l'enveloppe elle-même.

Monge a donné à la courbe de contact, dont les équations sont (A) et (B), le nom de *caractéristique* de l'enveloppe ou de la surface limite, parce qu'elle imprime à cette surface un caractère indépendant de la nature de la courbe $\beta = f(\alpha)$, qui fixe la loi de succession de toutes les surfaces enveloppées. Par exemple, quelle que soit la courbe des centres de toutes les sphères considérées ci-dessus, les caractéristiques n'en seront pas moins des cercles.

Il suit de là qu'en passant de la seconde à la troisième enveloppe, pour obtenir une nouvelle caractéristique, α doit, dans les équations (A) et (B), varier d'une quantité infiniment petite $d\alpha$: cette seconde caractéristique sera donc donnée par

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0, \qquad (C)$$

$$\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right) = 0; \qquad (D)$$

or, celles-ci coupant en général la première, il en résulte que, pour chacun des points d'intersection de ces deux courbes,

$$U = 0, \qquad \left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0, \qquad \left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right) = 0.$$

Tant que l'on attribuera au paramètre α une valeur particulière, ces trois équations ne donneront que les coordonnées des points communs aux deux caractéristiques consécutives qui résultent de cette valeur; mais en éliminant α entre (A), (B), (C), on aura en x, y, z deux équations qui appartiendront à la courbe formée par le système des points d'intersection que l'on considère, et qui sera touchée par toutes les caractéristiques, de même que l'enveloppe est touchée par toutes les enveloppées : cette courbe est l'*arête de rebroussement* de l'enveloppe, parce qu'elle la sépare en deux nappes distinctes.

S'il arrivait que trois caractéristiques consécutives se rencontrassent, ou que deux caractéristiques vinssent à coïncider, les quatre équations

$$U = 0, \quad \left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^3U}{d\alpha^3}\right) = 0,$$

auraient nécessairement lieu à la fois; or, en éliminant entre elles x, y, z, on obtiendra une équation unique, qui ne renfermera plus que α, et à l'aide de laquelle on pourra trouver le point de l'arête de rebroussement commun à trois caractéristiques consécutives. Cette théorie est traitée à fond dans l'ouvrage cité, de Monge : nous nous contentons d'en donner ici une idée.

192. Résolvons actuellement le problème suivant, à cause de son analogie avec ce qui précède : *Déterminer tous les plans qui retranchent d'un angle trièdre une pyramide équivalente à un volume V donné.*

Nous imiterons la solution du cas particulier traité au n° 177, et, à cet effet, nous prendrons, pour équation générale des plans cherchés,

$$Ax + By + Cz = \rho; \qquad (1)$$

les intersections des trois plans qui forment l'angle trièdre étant prises pour les axes des coordonnées. L'un de ces plans cherchés coupera ces axes en des points dont les distances

à l'origine seront

$$x = \frac{\rho}{A}, \qquad y = \frac{\rho}{B}, \qquad z = \frac{\rho}{C};$$

et, par la théorie du n° 173, le volume donné aura pour expression

$$V = \frac{\rho^3 R}{6\,ABC}; \qquad \text{d'où } A = \frac{\rho^2 R}{6\,BCV}.$$

L'équation (1) se change donc en celle-ci :

$$\rho^3 Rx + 6\,B^2CVy + 6\,BC^2Vz = 6\,BCV\rho. \qquad (2)$$

En la différenciant, par rapport à B et à C seulement, la position consécutive à celle qui résulte de cette équation sera donnée par

$$(2By + Cz - \rho) + (2Cz + By - \rho)\frac{dC}{dB} = 0; \quad (3)$$

ou, ce qui est la même chose, ces deux dernières équations seront celles de la commune section de deux plans consécutifs. La position de cette droite dépendant de la valeur du rapport $\frac{dC}{dB}$, et ce rapport variant nécessairement lorsque la situation du plan (1) change, il s'ensuit qu'en différenciant l'équation (3) dans l'hypothèse que $\frac{dC}{dB}$ est la seule variable, on aura ces deux autres équations,

$$2By + Cz = \rho, \qquad 2Cz + By = \rho, \qquad (4)$$

qui donneront la position d'une autre droite dont le point d'intersection avec la première sera sur une certaine surface courbe qu'il s'agit de déterminer.

Or, en vertu des équations (4), on a

$$C = \frac{\rho}{3z}, \qquad B = \frac{\rho}{3y};$$

et si l'on introduit ces valeurs dans l'équation (2), la surface courbe cherchée, qui sera touchée par tous les plans (1),

en un point x, y, z, aura pour équation

$$xyz = \frac{2V}{9R}.$$

Cette surface sera donc hyperboloïdique.

Nous pourrions, comme au n° 183, nous proposer de déterminer la position de la normale passant par l'origine des coordonnées, mais nous laisserons au lecteur le plaisir d'effectuer lui-même les calculs relatifs à cette solution. Nous observerons seulement qu'il faudrait pour cela employer quelques-unes des formules du n° 128, et avoir égard à ce que

$$xyz' + yzx' + xzy' = 3xyz$$

est, n° 188, l'équation du plan tangent à l'hyperboloïde *cubique* que l'on vient d'obtenir. Alors ce plan, qui serait perpendiculaire à la normale dont il s'agit, retrancherait de l'angle trièdre donné une pyramide dont la base serait un *minimum*. C'est ce que M. Français a reconnu le premier, n° 10 de la *Correspondance sur l'École Polytechnique*.

CHAPITRE II.

Recherche des équations de différentes surfaces, d'après la considération du plan tangent.

Des surfaces cylindriques.

193. Quelle que soit la position du plan tangent à une surface cylindrique, ce plan sera toujours parallèle à la génératrice. Cela posé, soient

$$x' = az', \quad y' = bz'$$

les équations d'une droite parallèle à cette génératrice, et passant par l'origine des coordonnées; l'équation du plan tangent, mené par un point x, y, z de la surface cylindrique, sera (n° 188)

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y).$$

Or, pour que ce plan, et la droite dont il s'agit, soient parallèles, il faut (n° 126) que l'on ait, entre les coefficiens a, b, p, q, la relation

$$1 = ap + bq, \text{ ou } 1 = a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right), \quad (A)$$

laquelle exprime qu'une surface est cylindrique, sans cependant rien prononcer sur la nature de la courbe qui dirige le mouvement de la génératrice.

Pour appliquer ce résultat à un exemple, résolvons ce problème :

Connaissant la direction de la génératrice, trouver l'équation de la surface cylindrique qui enveloppe une surface courbe donnée.

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface donnée; après en avoir tiré les valeurs des coefficiens différentiels $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, on les substituera dans l'équation différentielle (A) des surfaces cylindriques, et l'équation résultante $f(x, y, z) = 0$ appartiendra à la courbe de contact; mais cette courbe étant aussi sur la surface donnée, il s'ensuit que ses deux équations seront

$$F(x, y, z) = 0,$$
$$f(x, y, z) = 0.$$

Il ne s'agit donc plus que d'opérer comme au n° 143, pour avoir l'équation individuelle de la surface cylindrique circonscrite, puisque les équations de la génératrice sont connues.

Des surfaces coniques.

194. Un des caractères des surfaces coniques, est que le plan qui leur est tangent passe toujours par leur sommet. Soient donc a, b, c les coordonnées de ce point, et x, y, z celles d'un autre point de la surface conique par lequel doit passer le plan tangent.

Ce plan a généralement pour équation

$$z' - z = (x' - x)p + (y' - y)q;$$

et comme il doit passer par le sommet du cône, on a

$$c - z = (a - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (b - y)\left(\frac{dz}{dy}\right); \quad (A)$$

résultat qui exprime qu'une surface courbe est conique, sans néanmoins rien prononcer sur la nature de la courbe qui lui sert de base.

De là il est aisé de résoudre ce problème : *Étant données les coordonnées du sommet, trouver l'équation de la surface conique individuelle circonscrite à une surface courbe donnée.*

La ligne suivant laquelle se touchent la surface donnée et la surface conique demandée, étant en général une courbe à double courbure, il faudra, pour en déterminer les équations, avoir égard à ce que, pour tous les points de cette courbe de contact, les deux surfaces ont le même plan tangent, et qu'ainsi les valeurs des coefficiens différentiels $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ déduites tant de l'équation de l'une de ces surfaces, que de l'équation de l'autre surface, sont respectivement les mêmes.

Cela posé, soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface enveloppée; on en tirera les valeurs de $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$; et, après les avoir substituées dans l'équation (A) des surfaces coniques, on aura une autre équation en x, y, z, que l'on peut désigner par $f(x, y, z) = 0$; telles seront les équations de la courbe de contact, n° 185. Procédant ensuite comme au n° 144, on aura l'équation individuelle de la surface conique cherchée.

195. Afin de déduire de cette théorie quelques propriétés des surfaces du second degré, prenons, pour équation de la surface enveloppée,

$$Mz^2 + Ny^2 + Px^2 + 2Qz + 2Ry + 2Sx = 1; \quad (1)$$

forme sous laquelle peut être mise l'équation (f) du n° 139, et dénotons toujours par a, b, c les coordonnées du sommet de la surface conique. On tirera de là

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{Px + S}{Mz + Q}, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{Ny + R}{Mz + Q};$$

et l'équation (A) de la surface conique deviendra, par la

substitution de ces valeurs, et après avoir réduit à l'aide de la relation (1),

$$(Mc+Q)z+(Nb+R)y+(Pa+S)x+Qc+Rb+Sa+1=0;$$

celle-ci, que l'on peut mettre sous cette forme :

$$\gamma c+\beta b+\alpha a+\delta=0, \qquad (3)$$

en faisant $\gamma = Mz + Q$, $\beta = Ny + R$, $\alpha = Px + S$, $\delta = Qz + Ry + Sx + 1$, appartient nécessairement à un plan, puisqu'elle est linéaire en x, y, z: ainsi, la courbe de contact d'une surface quelconque du second degré et d'une surface conique est toujours plane (*). Or, il est évident que ce plan est fixe dans l'espace, lorsque les coordonnées a, b, c sont fixes elles-mêmes, mais que sa position varie, lorsque le sommet de la surface conique change de place. Supposons que ce point se meuve sur la surface

$$M'c^2+N'b^2+P'a^2=1. \qquad (4)$$

Si nous considérons deux positions consécutives du plan de la courbe de contact, résultante des deux positions infiniment voisines du sommet du cône, les coordonnées x, y, z de la droite d'intersection de ces deux plans seront constantes (n° 191), mais a, b, c auront varié toutes trois. Les équations de cette droite seront donc

$$\gamma c+\beta b+\alpha a+\delta=0, \quad \gamma dc+\beta db+\alpha da=0;$$

et pour exprimer que le sommet du cône ne quitte point la surface directrice (4), on aura encore, entre da, db, dc, cette relation

$$M'cdc+N'bdb+P'ada=0.$$

Éliminant dc entre celle-ci et la précédente, on trouvera

(*) Il est remarquable que l'équation (3) du plan de la courbe de contact représente l'équation du plan tangent, lorsque l'on y considère a, b, c comme les coordonnées courantes, et x, y, z comme les coordonnées du point de tangence (n° 148).

$$(M'\beta c - N'\gamma b)\,db + (M'\alpha c - P'\gamma a)da = 0.$$

La position de la droite dont il est question dépend de la valeur du rapport $\frac{da}{db}$, et, à cause de la liberté qu'a le sommet du cône de se mouvoir en tout sens sur la surface directrice, ce rapport est nécessairement arbitraire ; par conséquent les coefficiens de da et de db, dans cette dernière équation, doivent être nuls séparement ; on a donc

$$M'\beta c - N'\gamma b = 0, \quad (5); \qquad M'\alpha c - P'\gamma a = 0. \quad (6)$$

Il résulte de là que les coordonnées x, y, z, déduites des équations (3), (5), (6), sont celles du point commun à trois plans de contact consécutifs quelconques, et que le lieu de tous les points pareils fournis par d'autres positions du sommet du cône enveloppant, est une surface touchée par le plan (3). Pour déterminer l'équation de cette surface, on éliminera a, b, c entre les quatre équations (3), (4), (5), (6), ainsi qu'il suit.

On multipliera (5) et (6) respectivement par b et a, et la somme des produits sera

$$(P'a^2 + N'b^2)\gamma = M'c(\alpha a + \beta b);$$

puis l'on ajoutera $M'\gamma c^2$ de part et d'autre, et l'on aura

$$(P'a^2 + N'b^2 + M'c^2)\gamma = M'c(\alpha a + \beta b + \gamma c);$$

et après avoir élevé tout au carré, il viendra, à cause des relations (3) et (4),

$$\gamma^2 = M'^2\delta^2c^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{\gamma^2}{M'^2c^2} = \delta^2.$$

D'un autre côté, les équations (5) et (6), élevées au carré, donneront

$$M'^2\beta^2c^2 = N'^2\gamma^2b^2. \qquad M'^2\alpha^2c^2 = P'^2\gamma^2a^2,$$

et par conséquent

$$\frac{\beta^2}{N'} = \frac{N'\gamma^2 b^2}{M'^2 c^2}, \qquad \frac{\alpha^2}{P'} = \frac{P'\gamma^2 a^2}{M'^2 c^2}.$$

Faisant une somme de ces dernières et de l'équation identique $\frac{\gamma^2}{M'} = \frac{\gamma^2}{M'}$, il viendra, toutes réductions faites,

$$\frac{\gamma^2}{M'} + \frac{\beta^2}{N'} + \frac{\alpha^2}{P'} = \frac{\gamma^2}{M'^2 c^2};$$

mais $\frac{\gamma^2}{M'^2 c^2} = \delta^2$; donc

$$N'P'\gamma^2 + M'P'\beta^2 + M'N'\alpha^2 = M'N'P'\delta^2; \qquad (7)$$

résultat indépendant de a, b, c, et qui est du second degré en x, y, z, puisque α, β, γ sont des fonctions linéaires de ces variables. Donc, *si une surface conique touche et enveloppe constamment une surface courbe quelconque du second degré, pendant que son sommet parcourt une autre surface du second degré située comme on voudra dans l'espace, mais douée d'un centre, le plan de la courbe de contact des deux surfaces touchera toujours une troisième surface du second degré.*

Ceux qui voudront savoir comment il est possible d'extraire de la théorie précédente, due à Monge, d'autres propriétés curieuses des surfaces du second ordre, pourront consulter les Mémoires de MM. Livet et Brianchon, insérées dans le 13e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Nous nous contenterons d'énoncer les deux propositions suivantes, que Monge a démontrées le premier :

1°. *Tout étant égal d'ailleurs, comme ci-dessus, si le sommet du cône circonscrit se meut en ligne droite, le plan de la courbe de contact passera toujours par une même ligne droite ;* 2°. *si le sommet est dirigé par une surface plane, le plan de la courbe de contact passera toujours par un même point.*

Des surfaces de révolution.

196. C'est un caractère distinctif des surfaces de révolution, quelle que soit d'ailleurs la nature de la courbe génératrice, que le plan tangent est toujours perpendiculaire au plan mené par l'axe de rotation et par le point de contact.

Cela posé, soient

$$x' = Az' + a,$$
$$y' = Bz' + b,$$

les équations données de l'axe de révolution, et x, y, z les coordonnées du point de contact. L'équation du plan du méridien, c'est-à-dire de la section faite par l'axe, et assujettie à passer par le point de contact, est de la forme suivante (n° 121) :

$$z' - z = M(x' - x) + N(y' - y) : \qquad (m)$$

or, l'axe coïncidant avec cette section, il est évident que, pour tous les points qui leur sont communs, les coordonnées sont les mêmes; les trois équations précédentes doivent donc avoir lieu en même temps, et, en vertu du n° 126, il faut que l'on ait la relation

$$AM + BN = 1.$$

Mais les équations de l'axe pouvant être écrites ainsi :

$$x' - x = A(z' - z) + a - x + Az,$$
$$y' - y = B(z' - z) + b - y + Bz,$$

on en tire

$$\left.\begin{aligned} &a - x + Az = (x' - x) - A(z' - z), \\ \text{et} \\ &b - y + Bz = (y' - y) - B(z' - z). \end{aligned}\right\} \quad (n)$$

D'ailleurs, si, entre ces mêmes équations, l'on élimine z, on obtiendra

$$(x' - x)B - (y' - y)A = (a - x)B - (b - y)A;$$

équation qui, à cause de la relation $AM + BN = 1$, peut être mise sous ces deux formes :

$$(1 - AM)(x' - x) - (y' - y)AN = N[(a - x)B - (b - y)A],$$

$$(1 - BN)(y' - y) - (x' - x)BM = M[(b - y)A - (a - x)B];$$

et si, dans les équations (n), on substitue pour $z' - z$ sa valeur (m), on aura

$$\begin{aligned} a - x + Az &= (x' - x) - AM(x' - x) - AN(y' - y) \\ &= (x' - x)(1 - AM) - AN(y' - y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b - y + Bz &= (y' - y) - BM(x' - x) - BN(y' - y) \\ &= (y' - y)(1 - BN) - BM(x' - x). \end{aligned}$$

Donc, en rapprochant ces deux équations des deux précédentes, on conclura que

$$M[A(b - y) - B(a - x)] = b - y + Bz,$$
$$N[A(b - y) - B(a - x)] = -(a - x + Az);$$

ainsi l'équation (m) du plan du méridien mené par le point de contact, est

$$\begin{aligned} (z' - z)[A(b - y) - B(a - x)] &= (b - y + Bz)(x' - x) \\ &\quad - (a - x + Az)(y' - y); \end{aligned}$$

et comme celle du plan tangent est (n° 188)

$$z' - z = (x' - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y' - y)\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

il résulte, du n° 125, que si ces deux plans sont perpendiculaires entre eux, on aura

$$\begin{aligned} (b - y + Bz)\left(\frac{dz}{dx}\right) - (a - x + Az)\left(\frac{dz}{dy}\right) \\ + A(b - y) - B(a - x) = 0. \end{aligned} \qquad (A)$$

cette relation exprime donc qu'une surface est de révolution autour d'un axe déterminé de position par les constantes A, B, a, b, indépendamment de la génératrice.

Indiquons maintenant la solution de ce problème : *Une surface courbe dont l'équation est donnée, étant liée d'une manière invariable à un axe de révolution, et tournant ensuite autour de cet axe, trouver l'équation de la surface qui touche et enveloppe la surface mobile dans toutes ses positions.*

La surface cherchée est nécessairement de révolution autour de l'axe donné, et la ligne suivant laquelle elle touche la surface mobile considérée dans sa première position, est une courbe dont il suffira d'avoir les équations ; car alors la question rentrera dans celle qui a été traitée au n° 146.

Soit donc $F(x, y, z) = 0$ l'équation donnée de la surface mobile, considérée dans sa position initiale. Cette équation doit satisfaire à celle des surfaces de révolution ; donc, si l'on en tire les valeurs des coefficiens différentiels $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, et qu'on les substitue dans l'équation (A), la résultante $f(x, y, z) = 0$ appartiendra à la courbe de contact; ainsi les deux équations de cette courbe seront

$$F(x, y, z) = 0,$$
$$f(x, y, z) = 0;$$

et en opérant comme au n° cité, on aura l'équation de la surface individuelle cherchée.

Nous n'entrerons pas dans de plus grands détails sur les propriétés des courbes à double courbure et des surfaces courbes, parce que le lecteur qui veut s'instruire plus particulièrement sur cette matière, doit étudier l'*Application de l'Analyse à la Géométrie,* par Monge; ouvrage d'un génie supérieur, et qui développe toutes les ressources de l'analyse transcendante.

CHAPITRE III.

Solutions de quelques problèmes de MAXIMIS *et* MINIMIS.

197. Les solutions du petit nombre de problèmes suivans nous ont paru assez simples et assez élégantes pour être publiées dans ce Recueil : elles sont fondées sur les théories des nos 83 et 155 du *Traité de Calcul différentiel élém.* de M. Lacroix, 3e édit.

PROBLÈME.

Par un point M′ *donné dans l'intérieur d'un angle* MAN, *mener une droite* MN, *de manière que sa longueur* MN, *comprise entre les deux côtés de cet angle, soit un* minimum.

[Fig. 97.] Prenons pour axe des x la droite AX, qui divise l'angle donné MAN en deux parties égales; et soient $M'M = z$, $M'N = z'$, l'angle $R = \varphi$; puis, dénotons par x, y les coordonnées rectangles du point M, par x', y' celles du point M′.

L'équation de AM étant $y = ax$, celle de la droite AN qui est placée de la même manière au-dessous de l'axe des x sera $y = -ax$; or, si l'on transporte l'origine des axes au point M′, sans changer leur direction, on aura (n° 48),

$$AP = x = x' + z\cos\varphi,$$
$$PM = y = y' + z\sin\varphi;$$

et par conséquent l'équation $y = ax$ deviendra

$$y' + z \sin \varphi = a(x' + z \cos \varphi);$$

ainsi

$$z = \frac{ax' - y'}{\sin \varphi - a \cos \varphi}.$$

Pour trouver M'N ou z', on voit bien qu'il suffit de prendre a négativement dans ce résultat; on a donc sur-le-champ

$$z' = \frac{-ax' - y'}{\sin \varphi + a \cos \varphi};$$

en sorte que si l'on ajoute ces deux valeurs prises positivement, on obtiendra

$$z + z' = \frac{2a(x' \sin \varphi - y' \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi}.$$

Égalant à zéro le coefficient différentiel de cette expression dans laquelle φ est seul variable, afin d'établir la condition du *minimum*, on aura

$$(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)(\sin^2 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi)$$
$$+ 2(y' \cos \varphi - x' \sin \varphi)(\sin \varphi \cos \varphi + a^2 \sin \varphi \cos \varphi) = 0; \quad (1)$$

puis divisant tout par $\cos^3 \varphi$, et développant, on trouvera

$$\tang^3 \varphi - x' \frac{(2a^2+1)}{y'} \tang^2 \varphi + (a^2+2) \tang \varphi - \frac{a^2 x'}{y'} = 0. \quad (2)$$

Cette équation donne nécessairement une racine réelle dans le cas général, puisqu'elle est du troisième degré; mais lorsque $y' = 0$, le premier et le troisième terme disparaissant, on a simplement

$$\tang^2 \varphi = -\frac{a^2}{2a^2+1},$$

c'est-à-dire qu'alors l'équation (2) ne fournit aucune racine réelle. Cependant il ne faudrait pas conclure de là que le problème proposé n'est pas susceptible de *minimum*, dans

l'hypothèse actuelle ; car, si l'on remonte à l'équation (1) dont celle (2) dérive, et que l'on y fasse $y' = 0$, elle se réduira à

$$\cos\varphi(\sin^2\varphi - a^2\cos^2\varphi) - 2\cos\varphi\sin^2\varphi(1 + a^2) = 0,$$

et sera évidemment satisfaite par $\cos\varphi = 0$, ou par $\varphi = 100^{gr}$. Pour faire disparaître cet inconvénient, et rendre la formule (2) aussi générale que le comporte le problème, nous la changerons en une autre dans laquelle il n'y ait plus de dénominateur, et où, cependant, le premier terme n'ait que l'unité pour coefficient. A cet effet, nous ferons, comme l'on sait, $\operatorname{tang}\varphi = \frac{u}{y'}$, u étant une nouvelle inconnue ; et il viendra, après la substitution de cette valeur,

$$u^3 - x'(2a^2 + 1)u^2 + (a^2 + 2)y'^2u - a^2x'y' = 0. \quad (3)$$

Soit maintenant $y' = 0$, on aura

$$u = x'(2a^2 + 1);$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{x'(2a^2 + 1)}{y'} = \infty;$$

c'est-à-dire que quand le point M′ est sur l'axe des x, la droite *minimum* cherchée mn est perpendiculaire à cet axe.

Si, au contraire, $y' = ax'$, auquel cas le point M′ se confond avec le point m, la formule (3) se change en celle-ci :

$$u^3 - x'(2a^2 + 1)u^2 + (a^2 + 2)a^2x'^2u - a^4x'^3 = 0;$$

et par la méthode des diviseurs commensurables, on obtient aisément

$$u = x', \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{x'}{ax'} = \frac{1}{a}.$$

Il suit de ce résultat et du n° 42, que la droite *minimum*, partant d'un des points des côtés de l'angle AMN, doit être perpendiculaire à l'autre côté.

Enfin, si l'on avait seulement $x = 0$, l'équation (3) se réduirait à

$$u[u^2 + (a^2 + 2)y'^2] = 0,$$

et serait satisfaite par $u = 0$, ou par $\tang \varphi = \frac{0}{y'} = 0$; ainsi, lorsque le point par lequel doit passer la droite *minimum* est donné sur l'axe des y, cette droite est parallèle à l'axe des x, et rencontre les côtés de l'angle qui est le supplément de MAN.

Les autres particularités du problème se déduiraient avec la même facilité de l'équation (3).

On pourrait se proposer un problème analogue, dans l'espace; ce serait de *déterminer le plan* minimum *passant par un point donné dans un angle trièdre, et limité par les trois faces de cet angle :* problème dont il a déjà été parlé p. 449.

PROBLÈME.

198. *Déterminer la plus courte distance entre deux droites données dans l'espace.*

La propriété dont jouit cette ligne, c'est d'être à la fois perpendiculaire aux deux droites données. Quoique cela se prouve très simplement par la Géométrie élémentaire, voici comment l'analyse conduit au même but, et de quelle manière on parvient en même temps à l'expression de la plus courte distance cherchée.

Soient

$$\left.\begin{array}{ll} x = az + \alpha, & x' = a'z' + \alpha', \\ y = bz + \beta, & y' = b'z' + \beta', \end{array}\right\} \quad (1)$$

les équations des projections verticales des deux droites données: la distance entre les deux points xyz, $x'y'z'$ aura pour expression (n° 117),

$$u = \sqrt{(\alpha - \alpha' + az - a'z')^2 + (\beta - \beta' + bz - b'z')^2 + (z - z')^2}. \quad (2)$$

Cette quantité devant être un *minimum*, il faut que ses

différentielles, prises successivement par rapport à z et à z', soient nulles, à cause de l'indépendance de ces variables : ainsi on aura, pour les déterminer, les équations

$$\frac{du}{dz}=(z-z')+a(\alpha-\alpha'+az-a'z')+b(\beta-\beta'+bz-b'z')=0, \quad (3)$$

$$\frac{du}{dz'}=(z-z')+a'(\alpha-\alpha'+az-a'z')+b'(\beta-\beta'+bz-b'z')=0. \quad (4)$$

Il est d'abord facile de s'assurer que ces équations répondent au *minimum* demandé, car on trouverait que la condition

$$\frac{d^2u}{dz^2}\cdot\frac{d^2u}{dz'^2}-\left(\frac{d^2u}{dzdz'}\right)^2>0$$

est remplie (n° 155 du *Calc. diff. élém.* L. C.). Ensuite, pour parvenir à la propriété énoncée, on observera que la droite *minimum* devant passer par les points xyz, $x'y'z'$, ses équations sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} x-x'&=a''(z-z'),\\ y-y'&=b''(z-z'); \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

ou, à cause des valeurs de x, x', y, y', tirées des équations (1), on a

$$\left.\begin{aligned} (\alpha-\alpha'+az-a'z')&=a''(z-z'),\\ (\beta-\beta'+bz-b'z')&=b''(z-z'); \end{aligned}\right\} \quad (5')$$

de là les formules (3) et (4) se réduisent respectivement à

$$1+aa''+bb''=0, \qquad 1+a'a''+b'b''=0.$$

Ces relations expriment donc (n° 120) que la droite *minimum* est en même temps perpendiculaire aux deux droites données, et l'on en tire

$$a''=\frac{b'-b}{a'b-ab'}, \qquad b''=\frac{a'-a}{a'b-ab'}. \quad (6)$$

Actuellement, si l'on résout les équations (3) et (4), par rapport aux inconnues z, z', on obtiendra

$$z-z'=-\frac{(a'b-ab')\left[(b-b')(\alpha-\alpha')-(a-a')(\beta-\beta')\right]}{(a-a')^2+(b-b')^2+(a'b-ab')^2};$$

mais l'expression (2) devient, en vertu des formules (5') et (6),

$$u=\frac{(z-z')}{a'b-ab'}\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(a'b-ab')^2};$$

et en y substituant pour $z-z'$ sa valeur précédente, on a

$$u=-\frac{(b-b')(\alpha-\alpha')-(a-a')(\beta-\beta')}{\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(a'b-ab')^2}};$$

résultat conforme à celui auquel on parvient par des considérations purement élémentaires. (*Voy. l'Appl. de l'Alg. à la Géom. des surfaces*, par MM. Monge et Hachette, problème IV.)

PROBLÈME.

199. *Déterminer la route la plus courte pour aller d'un point à un autre, en passant par un plan donné de position à l'égard de ces points.*

Dans la question précédente, les plans coordonnés sont situés d'une manière quelconque, par rapport aux droites données; mais il est des cas, comme à présent, où telle position de ces plans, à l'égard des objets que l'on considère dans l'espace, est plus propre que toute autre pour mettre en évidence certaines propriétés de l'étendue; c'est de quoi l'on a été à même de se convaincre dans le cours de cet Ouvrage.

Soit donc pris, pour plan des xy le plan donné, et pour celui des xz, le plan qui passe par les deux points donnés. Dans cette hypothèse admissible, les coordonnées du point M' [fig. 99] sont

$$x=x',\ y=0,\ z=z';$$

celles de l'autre point M'' sont

$$x = x'', \; y = 0, \; z = z'';$$

et en supposant, pour le moment, que le point N du plan xy soit celui qui satisfait au *minimum* demandé, point dont les coordonnées sont x, y, on aura

$$M'N + M''N = \sqrt{(x-x')^2+y^2+z'^2} + \sqrt{(x-x'')^2+y^2+z''^2} = \sqrt{P} + \sqrt{P'}.$$

Comme les variables x et y sont indépendantes, les différentielles successives de cette expression donneront

$$\frac{x-x'}{\sqrt{P}} + \frac{x-x''}{\sqrt{P'}} = 0,$$

$$\frac{y}{\sqrt{P}} + \frac{y}{\sqrt{P'}} = 0.$$

Pour que cette dernière équation soit satisfaite, il faut que y soit nulle; ainsi la route la plus courte demandée est $M'N' + N'M''$, c'est-à-dire qu'elle est tout entière dans un plan perpendiculaire au plan donné xy. Alors, l'avant-dernière équation se réduit à

$$\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+z'^2}} = \frac{x''-x}{\sqrt{(x''-x)^2+z''^2}};$$

donc, $\cos M'N'A = \cos M''N'X$; donc, les deux lignes $M'N'$, $N'M''$ font le même angle avec le plan xy, ou avec la perpendiculaire $N'R$ à ce plan, comme on le démontre d'une autre manière en Mécanique.

Il résulte de là que la plus courte distance d'un point à un autre, en passant par une surface courbe, est représentée par une ligne brisée située dans un plan normal à cette surface.

On prouverait directement par une méthode semblable à la précédente, ou l'on tirerait encore pour conséquence de ce qui vient d'être démontré, que la somme des trois droites menées du point d'un plan à trois autres points de ce

plan est un *minimum*, lorsque ces droites partagent en trois parties égales la circonférence d'un cercle dont le centre est à leur point de concours. Ainsi, pour déterminer le point qui satisfait au *minimum* dont il s'agit, on décrira sur chacune des cordes AC, BC qui joignent les points donnés A, B, C, un arc de cercle capable de l'angle $= \frac{2}{3}$ d'un droit, et le point où ces deux arcs se couperont sera le point cherché.

PROBLÈME.

200. *Déterminer la plus courte distance de deux points mobiles dont on connaît les positions initiales, et qui se meuvent uniformément sur deux droites données dans l'espace.*

Je ne sache pas qu'aucun auteur de Mécanique élémentaire ait résolu ce problème d'une manière générale; cependant il est susceptible de l'être élégamment par la pure Géométrie; et, en se conformant à la remarque qui se trouve au commencement du n° précédent, l'analyse algébrique est très propre à faire découvrir la solution graphique fort simple dont ce problème est susceptible.

Pour cet effet, choisissons la position des plans coordonnés, de manière que les équations des deux droites données dans l'espace soient les plus simples possibles: or, c'est ce qui arrivera infailliblement en prenant 1°. pour plan des xy celui qui contient une des droites dont il s'agit, et qui est en même temps parallèle à l'autre droite; 2°. pour plan des xz celui qui passe par cette autre droite, et qui est en outre perpendiculaire au plan des xy.

[Fig. 100.] Maintenant, soient MM', mm' les droites données; la première étant située dans le plan des xy, et la seconde se trouvant dans celui des xz, parallèle à l'axe des x, les équations de MM' seront évidemment

$$y = -\tang \varphi . x + b, \quad z = 0;$$

et celle de la droite mm',

$$y = 0, \quad z = z'.$$

Supposons que les points mobiles se trouvant actuellement, l'un en M, dont les coordonnées sont α, β, et l'autre en m sur l'axe des z, se meuvent de A vers X, avec des vitesses uniformes qui soient entre elles comme $q : p$; alors si $M'm'$ est la plus courte distance à laquelle se trouveront ces deux mobiles, que les coordonnées du point M' soient désignées par α', β', et celles du point m' par x', z', on aura en général

$$M'm' = u = \sqrt{(x-\alpha')^2 + \beta'^2 + z'^2}.$$

Mais les espaces parcourus mm', MM' étant entre eux comme les vitesses p et q, on a $MM' = \frac{qx'}{p}$, et parce que l'angle formé par la droite MM' et l'axe des x est $= \varphi$, on a en outre

$$\alpha' = \alpha + \frac{qx'}{p}\cos\varphi, \qquad \beta' = \beta - \frac{qx'}{p}\sin\varphi.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression précédente de u, et que l'on égale à zéro la différentielle de cette expression, prise par rapport à x', on obtiendra une équation de laquelle on tirera

$$x' = \frac{\alpha(p^2 - pq\cos\varphi) + \beta pq\sin\varphi}{p^2 + q^2 - 2pq\cos\varphi},$$

ou bien

$$x' = \frac{p}{r} \times \frac{\alpha(p - q\cos\varphi) + \beta q\sin\varphi}{r},$$

en faisant, pour abréger, $p^2 + q^2 - 2pq\cos\varphi = r^2$.

La valeur de r peut être construite très simplement, car elle représente la base d'un triangle dont les deux autres côtés formant l'angle φ, sont p et q. Si donc, par un point quelconque G de la droite MM', on mène GF parallèle à

mm', et que l'on prenne GF de manière que MG et GF soient dans le rapport de q à p, la ligne MF sera la valeur de r.

Il suit de là qu'en prolongeant MF, et faisant .... $MR = \frac{\alpha(p - q\cos\varphi) + \beta q \sin\varphi}{r}$, la droite RM′ menée parallèlement à FG, sera $= x'$; et il est remarquable que la droite mR sera perpendiculaire à MF, et égale à la plus courte distance cherchée. Or, si cette circonstance a lieu, il est évident que la droite AR, qui est la projection de mR, sera elle-même perpendiculaire à MF. Il est facile de prouver cette propriété; car

$$\sin D = \frac{q \sin\varphi}{r}, \qquad \cos D = \frac{p - q\cos\varphi}{r};$$

par suite

$$DP = \frac{\beta(p - q\cos\varphi)}{q\sin\varphi}, \qquad DM = \frac{\beta r}{q\sin\varphi}, \quad AD = DP - \alpha;$$

et, si AR n'est pas perpendiculaire à DM, soit Ar cette perpendiculaire; alors on trouvera que

$$Dr = \left(\frac{\beta(p - q\cos\varphi)}{q\sin\varphi} - \alpha\right)\left(\frac{p - q\cos\varphi}{r}\right);$$

et ensuite on aura

$$Mr = DM - Dr = \frac{\alpha(p - q\cos\varphi) + \beta q \sin\varphi}{r};$$

donc $MR = Mr$; donc AR et mR sont réellement perpendiculaires à MD.

Au surplus, on reconnaît sur-le-champ cette vérité, parce qu'en général mF mesure la distance des deux mobiles : en effet, lorsque le premier M est arrivé en G, le second m a parcouru, sur mm', un espace mg égal à GF; la figure mFGg est donc un parallélogramme; et puisque de toutes les droites mF menées du point m à la droite MD, la plus courte

est la perpendiculaire AR, celle-ci est nécessairement la plus courte distance cherchée.

PROBLÈME.

201. *Parmi tous les quadrilatères que l'on peut former avec quatre lignes données, trouver celui qui a la plus grande surface.*

Soient a, b, c, d les quatre côtés d'un quadrilatère, a et b deux côtés consécutifs, et φ l'angle qu'ils forment; enfin, soit θ l'angle déterminé par les deux autres côtés. On aura, en désignant par x la diagonale du quadrilatère opposée à φ,

$$\text{surf. } (abx) = \frac{ab}{2} \sin \varphi,$$

$$\text{surf. } (bcx) = \frac{cd}{2} \sin \theta;$$

par conséquent la surface du quadrilatère sera

$$s = \frac{ab \sin \varphi}{2} + \frac{cd \sin \theta}{2}. \qquad (1)$$

D'un autre côté, les deux triangles dont se compose cette surface, donnant

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi,$$
$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \theta,$$

on a cette autre équation,

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi = c^2 + d^2 - 2cd \cos \theta : \qquad (2)$$

ainsi, pour trouver la surface *maximum*, on égalera à zéro la différentielle de la valeur de s, en faisant varier à la fois φ et θ, puisque ces deux angles sont fonction l'un de l'autre; et l'on substituera dans cette différentielle, divisée par $d\theta$, la valeur du rapport $\frac{d\varphi}{d\theta}$ tirée de l'équation (2); ce qui

donnera une relation entre les angles φ et θ, convenable au *maximum* demandé; ou bien l'on procédera ainsi qu'il suit.

De l'équation (1) l'on déduit

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{cd\cos\theta}{ab\cos\varphi},$$

et de celle (2) l'on obtient

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{cd\sin\theta}{ab\sin\varphi};$$

prenant la différence de ces deux valeurs, et réduisant, il vient

$$\frac{ds}{d\theta} = \sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta = \sin(\theta + \varphi) = 0;$$

donc les angles θ et φ sont supplémens l'un de l'autre; donc de tous les quadrilatères isopérimètres, dont les longueurs des côtés sont invariables, le plus grand est celui qui est inscriptible. Cette proposition est un cas particulier du théorème 6, livre IV, de la *Géométrie* de M. Legendre.

PROBLÈME.

202. [Fg. 102.] *Dans un quart d'hémisphère supposé avoir pour base le quart de cercle* ABC, *pratiquer une ouverture rectangulaire* APMQ, *dont le volume soit un* maximum.

Soient x, y les coordonnées du point M, et le rayon AB ou AC $= r$; on aura

$$PB = r - x \quad \text{et} \quad CQ = r - y.$$

Or, on sait, par les élémens de Géométrie, que le volume du quart d'hémisphère du rayon r a pour expression $\frac{\pi r^3}{6}$, π étant le rapport de la circonférence au diamètre,

et que le volume du quart de segment sphérique dont la base est MPB a pour valeur $\frac{\pi(r-x)^2}{4}\left(r-\frac{r-x}{3}\right)$; conséquemment le quart de segment sphérique CQM aura pour valeur $\frac{\pi(r-y)^2}{4}\left(r-\frac{r-y}{3}\right)$. Mais le volume de l'ouverture APMQ étant évidemment la différence du quart d'hémisphère ACB à la somme des deux quarts de segment PMB, CMQ, on a, en dénotant ce volume par V,

$$V=\frac{\pi r^3}{6}-\frac{\pi(r-x)^2}{4}\left[r-\frac{r-x}{3}\right]-\frac{\pi(r-y)^2}{4}\left[r-\frac{r-y}{3}\right].$$

Egalant à zéro la différentielle de cette expression, il vient, après les réductions,

$$dV=x^2dy+y^2dx=0.$$

D'un autre côté, à cause de $x^2+y^2=r^2$, on a

$$xdx+ydy=0;$$

partant,

$$\frac{dV}{dx}=y^2-x^2=0.$$

Ce résultat répond nécessairement au *maximum* demandé, car le coefficient différentiel $\frac{d^2V}{dx^2}$ est négatif, comme cela est aisé à vérifier; ainsi puisque l'ouverture APMQ doit être un carré, le point M sera le milieu du quart de circonférence CMB.

Ceux qui désireront connaître quelques-uns des problèmes très curieux sur la pénétration des corps, pourront consulter le second volume du *Calcul intégral* de M. Lacroix. Ils trouveront aussi, dans les *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, des questions de haute Géométrie du plus grand intérêt, et dont les solutions reposent sur la théorie de *maxima* et *minima*.

PROBLÈME.

203. *Déterminer quel doit être l'angle du losange que présente le fond des alvéoles des abeilles, et l'inclinaison que doit former cette face avec la base de l'alvéole, pour que la surface latérale du prisme et de ses fonds soit la plus petite possible.* [Fig. 104.]

Les alvéoles des abeilles sont de petites cellules qui ont la forme d'un prisme hexagonal A′C, dont les six faces latérales sont des trapèzes CC′B′*b*....., et dont le fond se compose de trois losanges CSA*b*....., qui, par leur réunion, forment un angle trièdre S; et il y a cela de remarquable, que les deux rangs d'alvéoles qui composent ces gâteaux de cire sont adossés les uns aux autres, et disposés de manière que l'axe d'un alvéole s'aligne avec la jointure commune des trois postérieurs, ainsi que le représente la figure 103 : ce qui était nécessaire pour donner lieu à l'arrangement de leurs fonds communs.

Cela posé, soit mené, par la diagonale AC qui joint les extrémités de deux arêtes égales AA′, CC′, un plan CBA parallèle à la base hexagonale régulière A′B′C′.... Il résultera de là le prisme triangulaire ACBA′C′B′ à bases parallèles; et si l'on joint le point S au centre P′ de l'hexagone A′B′C′..., la partie SP = B*b* de l'axe de l'alvéole sera la hauteur de la pyramide ACPS. Quelle que soit donc l'inclinaison SOP du plan SC*b* sur le plan PCB, ou sur celui de la base hexagonale de l'alvéole, les deux pyramides ACPS, ACB*b* seront toujours équivalentes, et par conséquent le volume de l'alvéole sera toujours le même: quant à sa surface, elle variera nécessairement avec l'angle SOP. Voici le moyen de trouver la valeur de cet angle, pour que cette surface soit un *minimum*, comme dans le cas de la nature.

Soit l'angle SOP = θ; prenons, pour unité de longueur,

le côté de l'hexagone régulier A'B'C'.... , et désignons par h la plus longue arête AA'. Le triangle BOb étant rectangle en B, on aura

$$Ob = OS = \frac{BO}{\cos\theta} = \frac{1}{2\cos\theta},$$

$$Bb = SP = \tfrac{1}{2}\tang\theta;$$

d'où

$$B'b = h - \tfrac{1}{2}\tang\theta:$$

ainsi l'aire du trapèze CC'B'b sera $= \frac{1}{2}(2h - \frac{1}{2}\tang\theta)$, et la surface latérale de l'alvéole ou des six trapèzes, aura pour expression $3(2h - \frac{1}{2}\tang\theta)$.

De plus, le côté du triangle équilatéral inscrit est

$$AC = 2\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3}, \quad \text{et} \quad Sb = 2SO = \frac{1}{\cos\theta};$$

par conséquent l'aire du losange.....

$AbCS = AC \times SO = \frac{1}{2\cos\theta}\sqrt{3}$; donc, les trois losanges $= \frac{3}{2\cos\theta}\sqrt{3}$; donc enfin la surface totale de l'alvéole, sans y comprendre toutefois la base, a pour expression

$$u = 3(2h - \tfrac{1}{2}\tang\theta) + \frac{3}{2\cos\theta}\sqrt{3}.$$

Cette surface devant être un *minimum*, on a

$$\frac{du}{d\theta} = -\tfrac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = 0;$$

et de là on tire

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \text{ou} \quad \sin^2\theta = \frac{1}{3}:$$

mais, $\log\frac{1}{3} = 9{,}5228787$; partant

$\log \sin^2\theta = 19{,}5228787$, et $\log \sin\theta = 9{,}7614393$; ainsi l'angle $\theta = 39^{gr}, 18', 26''5$.

En général, $SO = \frac{1}{2\cos\theta}$; donc, dans le cas du *minimum*, $SO = \sqrt{\frac{3}{8}}$, par suite.....

$Cb = \sqrt{\overline{CO}^2 + \overline{Ob}^2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$; et comme le triangle COb donne $\tang OCb = \frac{Ob}{OC} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; on doit conclure que l'angle $SCb = 2OCb = 78^{gr}, 36' 53''$; enfin, que l'angle SCA = l'angle SOP.

Ces résultats s'accordent avec les mesures prises sur une multitude d'alvéoles; ainsi, les abeilles, par l'effet d'un instinct admirable que les géomètres seuls pouvaient remarquer, économisent leur cire de la manière la plus avantageuse.

204. Voici les énoncés de plusieurs autres problèmes qui sont encore de nature à exercer utilement les élèves :

1°. *Assigner la position des pieds de l'homme, de manière que le trapèze de sustentation soit le plus grand possible.*

2°. *Parmi toutes les ellipses que l'on peut faire passer par les sommets des quatre angles d'un trapèze, déterminer celle qui a la plus grande ou la plus petite surface, et celle qui approche le plus d'être un cercle.*

3°. *Déterminer les dimensions du plus grand cylindre qu'il soit possible d'inscrire dans un cône donné.*

4°. *Entre tous les cônes droits qui ont le même volume, découvrir celui dont l'enveloppe est un* minimum.

5°. *De tous les cylindres que l'on peut inscrire dans une même sphère, trouver celui dont la surface courbe est un* maximum, *ou dont le volume est le plus grand possible.*

Quoique le calcul différentiel serve ordinairement pour ré-

soudre les questions de *maximis* et *minimis*, il est cependant une foule de circonstances où la *Méthode des variations* est la seule qui puisse, à cet égard, conduire directement au but. Nous pourrions rapporter ici quelques exemples à l'appui de cette assertion, mais ce serait sortir des bornes que nous nous sommes prescrites : il est temps, d'ailleurs, de terminer cette collection de Propositions de Géométrie, parce qu'il est suffisamment prouvé aux jeunes mathématiciens que les méthodes générales, lorsqu'elles sont présentées de la manière la plus simple, sont presque toujours les plus faciles ; et que quand on s'exerce à bien lire dans l'analyse algébrique, à en traduire géométriquement les résultats, on découvre souvent un grand nombre de vérités importantes et nouvelles.

FIN.

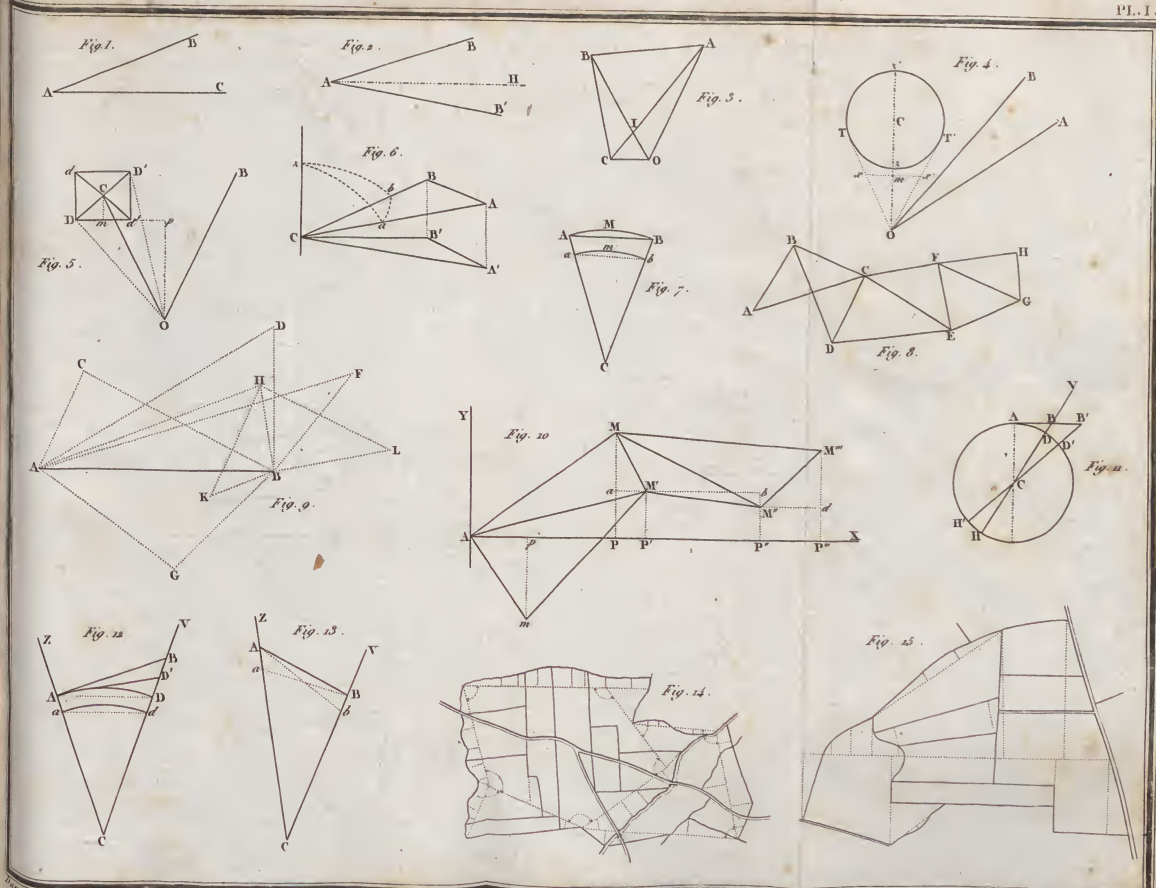


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10
Fig. 11.
Fig. 12
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.

Barena del.

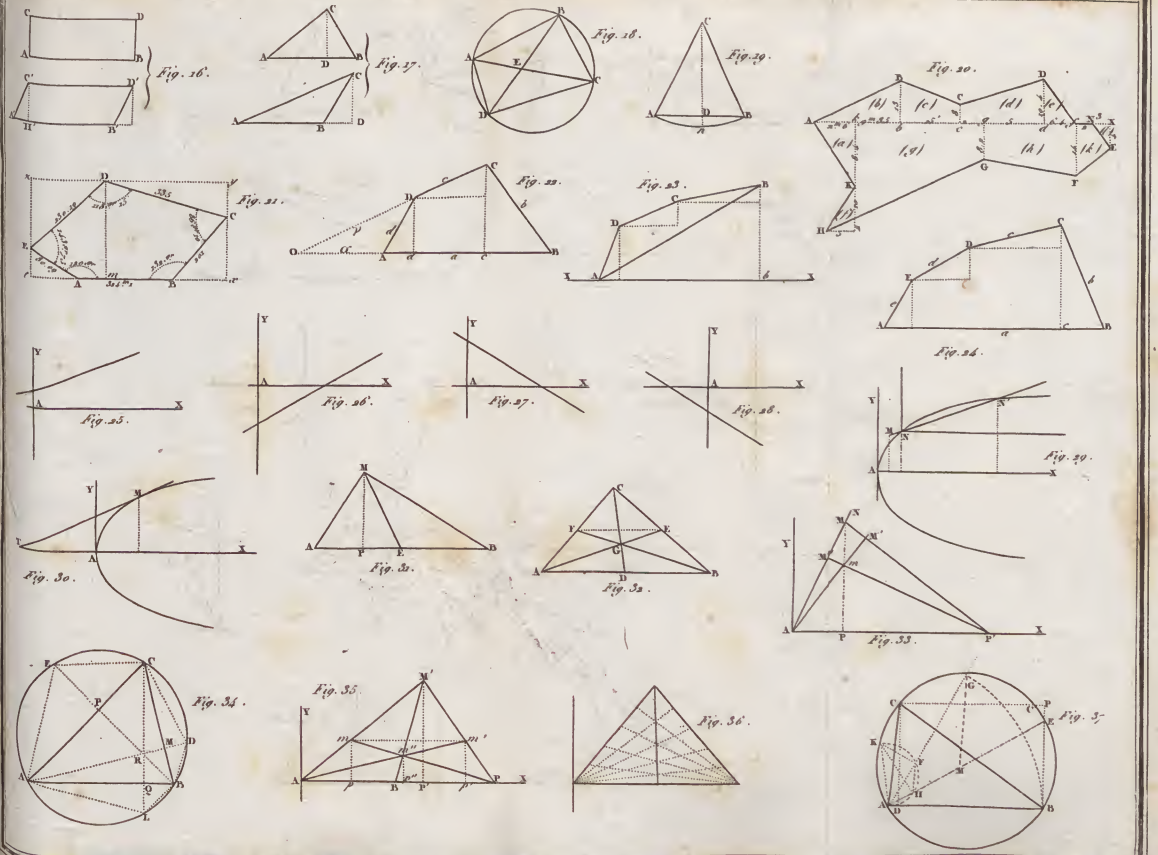


Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.

Guerina del.

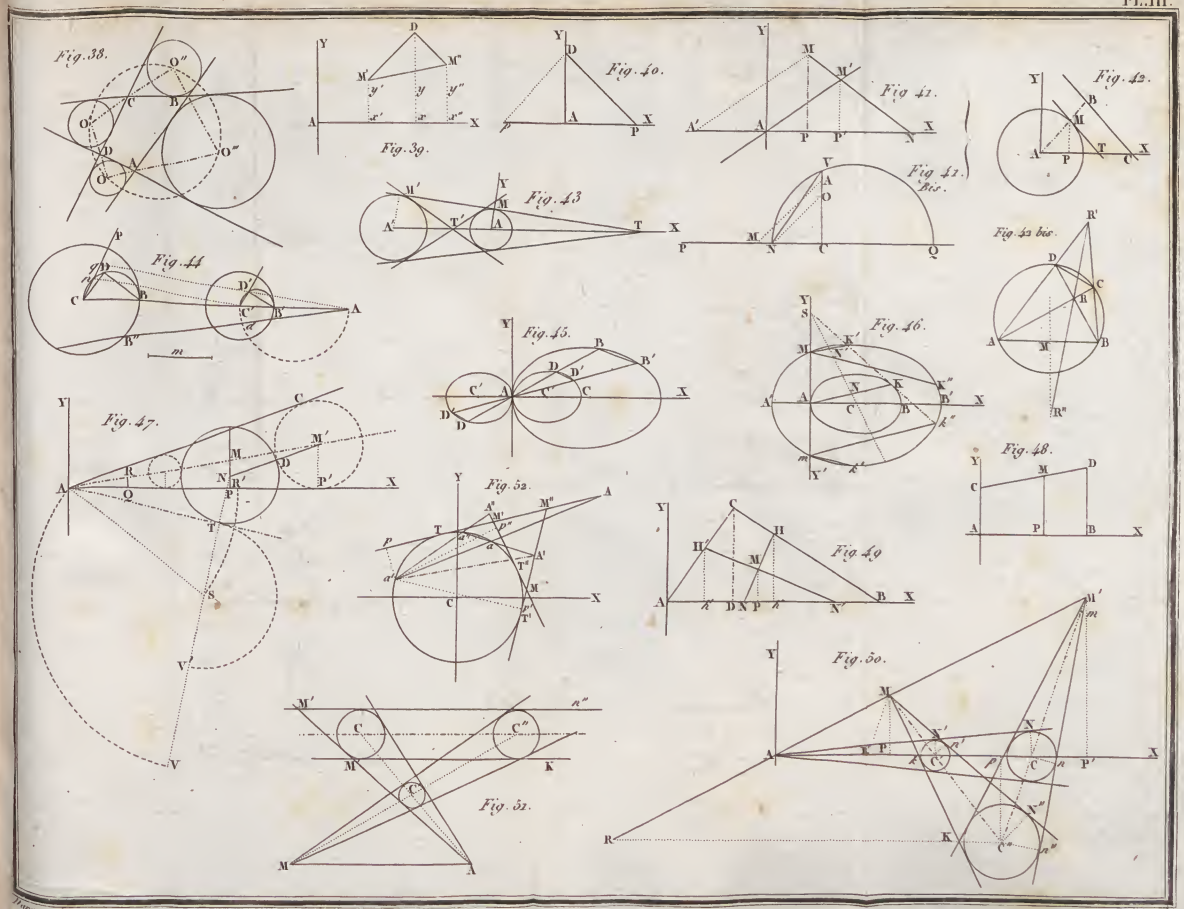


Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 41. Bis.
Fig. 42.
Fig. 42 bis.
Fig. 43
Fig. 44
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.

Turena del

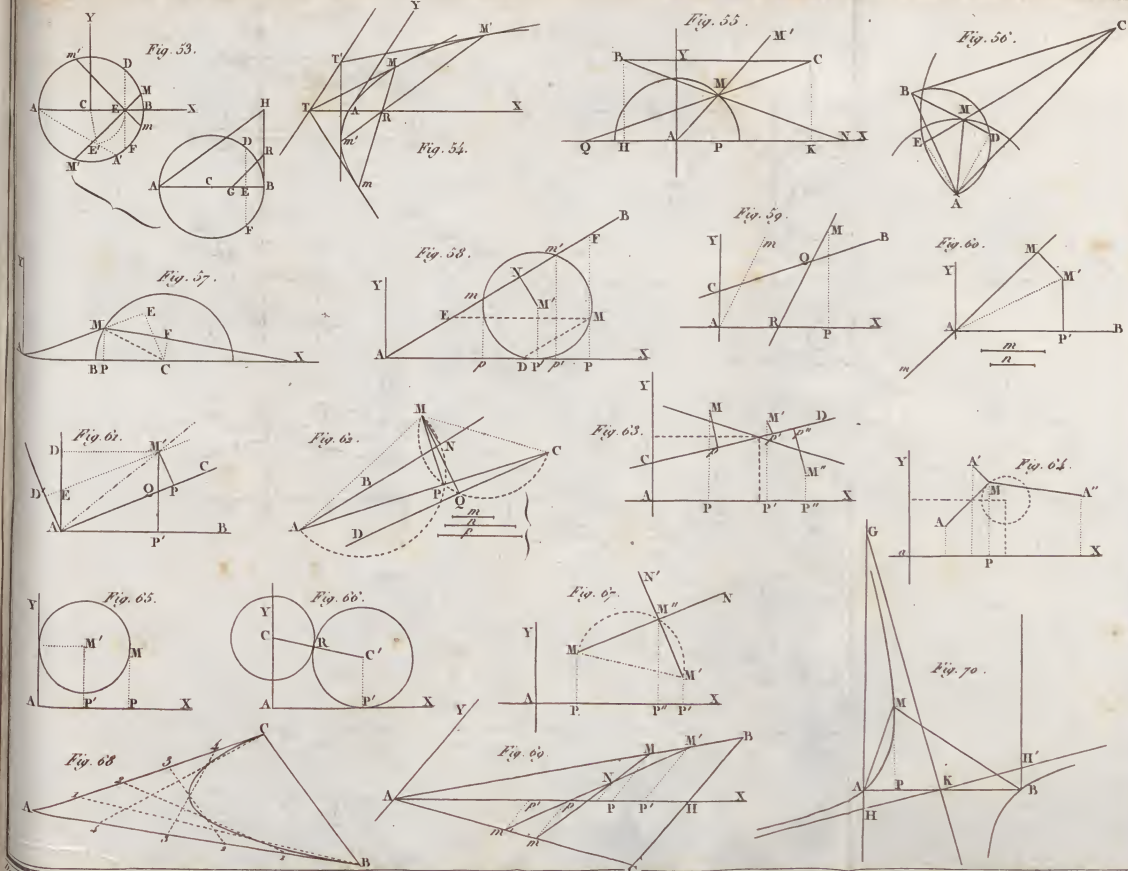
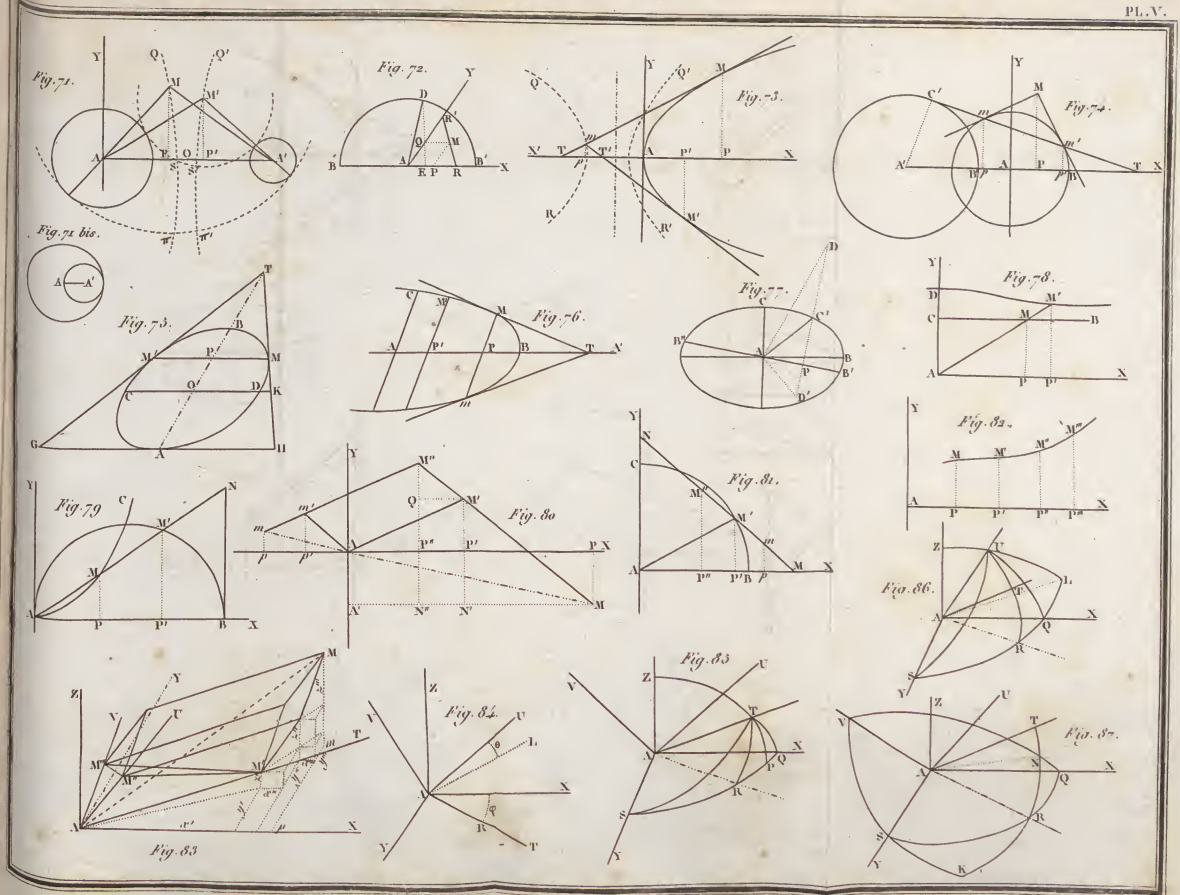
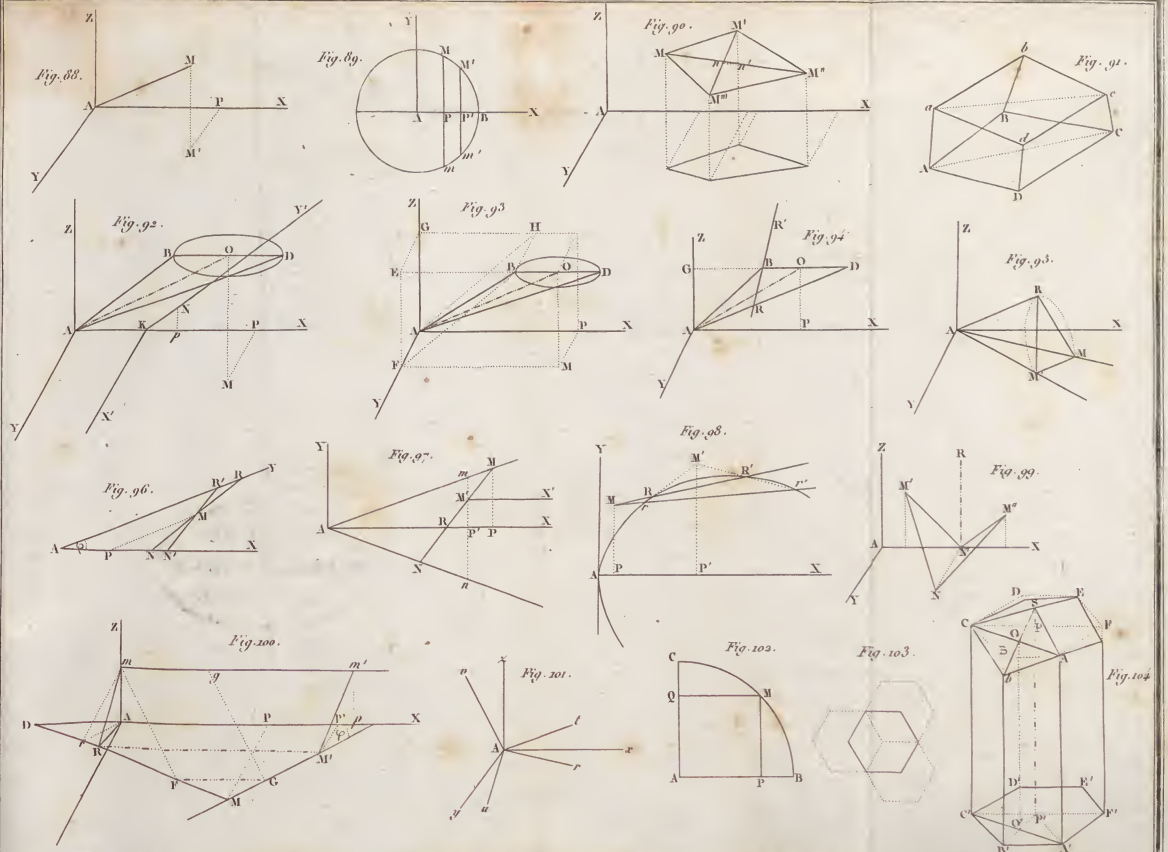


Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68
Fig. 69.
Fig. 70.

Dacena del.



Gravé par Durand. Rue Mignon N°7.



Gravé par Darena Rue Mignon N° 7.

ACCADEMIA
R. DELLE SCIENZE
DI TORINO